

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛИЗУ для студентов  
3 курса ФИЗМЕХа (5 семестр)**

2024/25 уч.г., лектор – доц. Моисеев А.А.

1. Множество комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.
2. Предел комплексной последовательности. Расширенная комплексная плоскость.
3. Комплексные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость.
4. Комплексные функции вещественного переменного. Предел, непрерывность, производная, интеграл.
5. Путь на комплексной плоскости. Области.
6. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность.
7. Понятия производной и дифференцируемой функции комплексного переменного. Основные свойства. Примеры.
8. Условия Коши-Римана. Понятие гармонической функции.
9. Понятие голоморфной функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Степенная функция с натуральным показателем (геометрическое описание отображения).
10. Криволинейный интеграл функции комплексного переменного. Основные свойства.
11. Теорема об интегралах по гомотопным путям. Интегральная теорема Коши.
12. Теорема о существовании первообразной. Первообразная голоморфной функции в односвязной области.
13. Интегральная формула Коши.
14. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Теорема Морера.
15. Теорема о различных описаниях голоморфной функции в односвязной области.
16. Комплексные степенные ряды. Радиус сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда внутри круга сходимости.
17. Почленное дифференцирование степенного ряда. Голоморфность суммы степенного ряда.
18. Разложение голоморфной функции в степенной ряд.
19. Понятие целой функции. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры.
20. Нули голоморфной функции. Лемма об изолированности нуля. Порядок нуля.
21. Теорема единственности голоморфной функции.
22. Определение показательной функции комплексного переменного. Голоморфность. Теорема сложения. Периодичность. Геометрическое описание.
23. Определение тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного. Их взаимосвязь. Формулы Эйлера.
24. Понятие логарифма комплексного числа. Главная ветвь логарифма. Голоморфность ветви логарифма. Разложение логарифмической функции в степенной ряд.
25. Корень  $n$ -й степени. Ветвь корня. Степенная функция с вещественным показателем, ее разложение в степенной ряд.
26. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Голоморфность суммы ряда Лорана.
27. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Лорана.
28. Изолированные особые точки голоморфной функции. Их классификация. Теорема об устранимой особенности.
29. Полус полюс голоморфной функции. Порядок полюса.
30. Существенно особая точка. Теорема Пикара (без доказательства).  $\infty$  как изолированная особая точка.
31. Понятие вычета голоморфной функции. Вычисление вычетов.
32. Теорема о вычетах. Применение теоремы о вычетах для вычисления интегралов вида
$$\int_0^{2\pi} R(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi.$$
33. Лемма о бесконечной малости интеграла по полуокружности. Вычисление интегралов
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$
 с помощью вычетов.

34. Лемма Жордана. Вычисление интегралов  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x} dx$  с помощью вычетов.
35. Вычисление интегралов Дирихле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  и Френеля  $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  с помощью вычетов.
36. Вычисление интегралов  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$  и  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$  с помощью вычетов.
37. Аналитическое продолжение по цепочке областей.
38. Аналитическое продолжение вдоль пути. Единственность продолжения. Тривиальный пример. Принцип перманентности.
39. Понятие аналитической функции. Аналитическая функция в области. Теорема о монодромии.
40. Логарифмическая функция. Построение аналитического продолжения вдоль пути.
41. Логарифмическая функция. Канонические элементы. Риманова поверхность логарифма.
42. Аналитическая функция  $\sqrt{z}$ . Риманова поверхность квадратного корня.
43. Точки ветвления аналитической функции. Точки ветвления логарифма и корня.
44. Точки ветвления аналитической функции. Аналитическая функция  $\operatorname{arctg} z$ .
45. Точки ветвления аналитической функции. Аналитическая функция  $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ .
46. Точки ветвления аналитической функции. Аналитическая функция  $\operatorname{arcsin} z$ .
47. Логарифмическая производная голоморфной функции. Логарифмический вычет.
48. Принцип аргумента. Теорема Руше.
49. Теорема об обращении голоморфной функции.
50. Теорема о числе решений уравнения  $f(z) = w$ . Принцип сохранения области. Принцип максимума модуля.