РЯДЫ ЛОРАНА

1.Функцию $\frac{1}{(z-2)^2}$ **разложите в ряд Лорана в окрестностях точек** $0, 1, 2, \infty$**.**

$$\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{2^{n+2}},\ |z|<2;$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{\left(1-(z-1)\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-1)^n,\ |z-1|<1;$$

$$\frac{1}{(z-2)^2},2<|z|<+\infty$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{2^n}{z^{n+2}}=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{2^{n-2}}{z^n},\ |z|>2.$$

2. 545 Функцию $\frac{1}{z(1-z)}$ **разложите в ряд Лорана в окрестностях точек** $0, 1, \infty$**.**

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1+(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1.$$

$$\frac{1}{z(1-z)}=-\frac{1}{z^2\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n},\ |z|>1.$$

3. Функцию $\frac{1}{z^2-5z+6}$ **разложите в ряд Лорана в окрестностях точек** $2, \infty$ **и в кольце** $2<|z|<3$**.**

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-(z-2)}-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n,\ 0<|z-2|<1;$$

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n-2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n-1}-2^{n-1}\right)\frac{1}{z^n},\ |z|>3;$$

$$\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n},\ 2<|z|<3;$$

4.Функцию $\frac{1}{z^2(z-3)}$ **разложите в ряд Лорана в окрестностях точек** $0,\ 3,\ \infty$ **и в кольце** $1<|z-1|<2$

$$\frac{1}{z^2(z-3)}=-\frac{1}{3z^2}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{3^{n+1}}=-\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+3}},\ 0<|z|<3;$$

$$\frac{1}{z^2(z-3)}=\frac{1}{(z-3+3)^2(z-3)}=\frac{1}{9(z-3)}\frac{1}{\left(1+\frac{z-3}{3}\right)^2}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{(z-3)^{n-1}}{3^{n+2}}=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+2)\frac{(z-3)^n}{3^{n+3}},\ 0<|z-3|<3;$$

$$\frac{1}{z^2(z-3)}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+3}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^{n-3}}{z^n},\ |z|>3$$

$$\frac{1}{z^2(z-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z(z-3)}-\frac{1}{z^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{z^2}\right)=$$

$$\frac{1}{9}\frac{1}{(z-1)-2}-\frac{1}{9}\frac{1}{(z-1)+1}-\frac{1}{3}\frac{1}{((z-1)+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{18}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}-\frac{1}{9(z-1)}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}-\frac{1}{3(z-1)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^2}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{9(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}-\frac{1}{3(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(z-1)^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{9(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{3(z-1)^{n+2}}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{9(z-1)^n}-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{3(z-1)^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{9}-\frac{n-1}{3}\right)\frac{1}{(z-1)^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9\cdot 2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-4}{9}\frac{1}{(z-1)^n},\ 1<|z-1|<2.$$

5.553. Функцию $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ разложите в ряд Лорана в окрестности точки 2.

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos\frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2}=\cos\left(1-\frac{4}{(z-2)^2}\right)=$$

$$\cos 1\cos\frac{4}{(z-2)^2}+\sin 1\sin\frac{4}{(z-2)^2}=$$

$$=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{(z-2)^{4n}}+\sin 1\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{(z-2)^{4n-2}}.$$