Вторая теорема Абеля

Пусть функция f представлена степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

с радиусом сходимости $R=1$.

Ряд сходится в некоторой граничной точке $e^{i\varphi}$ круга сходимости.

Тогда

$$=\lim_{r\to1-0}f\left(re^{i\varphi}\right)=\lim_{r\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n e^{in\varphi}$$

Докажите равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|,\ 0<|\varphi|<\pi;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}=\frac{\pi-\varphi}{2},\quad 0<\varphi<2\pi.$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)$$

$$z=e^{i\varphi}:\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{n}=-\ln\left(1-e^{i\varphi}\right),\ 0<\varphi<2\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}=-\ln\left(1-e^{i\varphi}\right)=-\ln\left(-e^{i\frac{\varphi}{2}}2i\sin\frac{\varphi}{2}\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)+i\frac{\pi-\varphi}{2},\quad 0<\varphi<2\pi;$$

Записывая равенства вещественных и мнимых частей, получаем требуемое. (Справедливость первого равенства при условии $0<|\varphi|<\pi$ обеспечивается четностью левой и правой частей равенства).