Суммирование рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)}{n+2}\frac{z^n}{3^n}$$

Запишем разложение логарифма

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z),\ |z|<1.$$

Первые два члена ряда перенесем вправо:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)-z-\frac{z^2}{2}.$$

Равенство разделим на z^2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n+2}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n}=-\frac{\ln(1-z)}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}.$$

Продифференцируем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n+2}=\frac{1}{z^2(1-z)}+2\frac{\ln(1-z)}{z^3}+\frac{1}{z^2}.$$

Умножим на z^5:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n+4}}{n+2}=\frac{z^3}{1-z}+2z^2\ln(1-z)+z^3.$$

Продифференцируем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)z^{n+3}}{n+2}=\frac{3z^2}{1-z}+\frac{z^3}{(1-z)^2}+4z\ln(1-z)-\frac{2z^2}{1-z}+3z^2=$$

$$=\frac{z^2}{1-z}+\frac{z^3}{(1-z)^2}+4z\ln(1-z)+3z^2,\ |z|<1.$$

Разделим на z^3:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)z^{n}}{n+2}=\frac{1}{z(1-z)}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{4}{z^2}\ln(1-z)+\frac{3}{z}=$$

$$=\frac{4-6z+3z^2}{z(1-z)^2}+\frac{4}{z^2}\ln(1-z).$$

Заменяя в последнем равенстве z на $\frac{z}{3}$, получаем окончательный ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+4)}{n+2}\frac{z^n}{3^n}=\frac{108-54z+9z^2}{z(3-z)^2}+\frac{36}{z^2}\ln\left(1-\frac{z}{3}\right),\ |z|<3.$$