Числа Бернулли

Функцию $\dfrac{z}{e^z-1}$ разложим в степенной ряд по степеням z:

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,\ |z|<2\pi. \qquad (1)$$

Коэффициенты B_n называются числами Бернулли.

Умножив (1) на e^z-1, получим равенство

$$z=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,\ |z|<2\pi,$$

из которого получаются соотношения

$$B_0=1,\ \sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}B_k=0,$$

позволяющие последовательно найти $B_1, B_2, \dots$:

$$B_0=1;$$
$$B_0+2B_1=0,\ B_1=-\frac{1}{2};$$
$$B_0+3B_1+3B_2=0,\ B_2=\frac{1}{6};$$
$$B_0+4B_1+6B_2+4B_3=0,\ B_3=0;$$
$$B_0+5B_1+10B_2+10B_3+5B_4=0,\ B_4=-\frac{1}{30};$$
$$B_0+6B_1+15B_2+20B_3+15B_4+6B_5=0,\ B_5=0;$$
$$B_0+7B_1+21B_2+35B_3+35B_4+21B_5+7B_6=0,\ B_6=\frac{1}{42};$$
$$B_7=0;\ B_8=-\frac{1}{30};\ B_9=0;\ B_{10}=\frac{5}{66}.$$

Возникает гипотеза об обращении в нуль чисел Бернулли с нечетными индексами. Гипотеза подтверждается соотношением

$$\frac{z}{e^z-1}-\frac{-z}{e^{-z}-1}=\frac{z}{e^z-1}+\frac{-ze^z}{e^z-1}=-\frac{z\left(e^z-1\right)}{e^z-1}=-z;$$
$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_{2k-1}=0\ \left(k=2,3,\dots\right).$$

Из соотношения (1) можно получить некоторые интересные разложения:

$$z\operatorname{ctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_{2n}\frac{2^{2n}}{(2n)!}z^{2n},\ |z|<\pi;$$

$$\operatorname{tg} z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} B_{2n}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{(2n)!}z^{2n-1},\ |z|<\pi/2;$$

$$\ln\cos z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_{2n}\frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)}{2n(2n)!}z^{2n},\ |z|<\pi/2;$$

$$\frac{z}{\sin z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} B_{2n}\frac{\left(2^{2n}-2\right)}{(2n)!}z^{2n},\ |z|<\pi;$$

Докажем эти равенства.

Положим

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,\ |z|<2\pi.$$

Теперь

$$g(z)=z\operatorname{ctg} z=z\frac{\cos z}{\sin z}=iz\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=iz\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}=$$
$$=iz\left(1+\frac{2}{e^{2iz}-1}\right)=iz+\frac{2iz}{e^{2iz}-1}=iz+f(2iz)=$$
$$=iz+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2iz)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}.$$

Запишем формулу тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg} 2z=\frac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}.$$

Отсюда получается

$$\operatorname{ctg} 2z = \frac{1-\operatorname{tg}^2 z}{2\operatorname{tg} z} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg} z - \operatorname{tg} z\right);$$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2\operatorname{ctg} 2z = \frac{1}{z}\left(z\operatorname{ctg} z - 2z\operatorname{ctg} 2z\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(g(z) - g(2z)\right) = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}(2z)^{2k}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}\left(1-2^{2k}\right)z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Разложение для $\ln\cos x$ получается интегрированием разложения тангенса.

Наконец,

$$\frac{z}{\sin z} = z\frac{\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}+1}{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}} = \frac{z}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{z}{2} + \operatorname{ctg}\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} =$$

$$= \frac{z}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} + g\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-1\right)B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}.$$