

Занятия 6–7

Степенные ряды

Найдите радиусы сходимости степенных рядов

$$425. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$428. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$$

$$434. \sum_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n$$

Исследуйте поведение степенного ряда на границе круга сходимости

$$441. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$442. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

2-я теорема Абеля.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

$$448 \text{ 1) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right|, \quad 0 < |\varphi| \leq \pi$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2}, \quad -\pi < \varphi < \pi$$

Разложите функции в степенные ряды по степеням z , укажите радиус сходимости

$$452. \operatorname{ch} z$$

$$455. \operatorname{ch}^2 z$$

$$457. \sqrt{z+i}, \quad \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$460. \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

$$462. \operatorname{Arctg} z, \quad \operatorname{Arctg} 0 = 0$$

469. Разложите функцию $\frac{z^2}{(z+1)^2}$ в степенной ряды по степеням $(z-1)$, укажите радиус

сходимости

Числа Бернулли

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi. \quad (1)$$

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k B_k = 0,$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}.$$

$$B_{2k-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

$$z \operatorname{ctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi;$$

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_{2n} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} z^{2n-1}, \quad |z| < \pi/2;$$

$$\operatorname{Incos} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_{2n} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi/2;$$

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B_{2n} \frac{(2^{2n}-2)}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi;$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

427, 431;

440; 443;

448 3,4);

453, 454; 458, 459, 461, 468;

488 1,3,4)