1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\,dx$.

Вычислим интеграл $\int\limits_{\Gamma_{rR}} \frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\,dz$ по контуру Γ_{rR}, составленному из окружностей C_r, C_R радиусов r и R соответственно и двух берегов разреза по радиусу $\left[r,R\right]$. По теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_{rR}} \frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2},1+i\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2},1-i\right)\right).$$

Точки $1\pm i$ полюсы 2-го порядка подынтегральной функции, поэтому

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2},1+i\right)=\left(\frac{d}{dz}\frac{\ln z}{\left(z-(1-i)\right)^2}\right)\Bigg|_{z=1+i}=\left(\frac{1}{z}\frac{1}{\left(z-(1-i)\right)^2}-\frac{2\ln z}{\left(z-(1-i)\right)^3}\right)\Bigg|_{z=1+i}=$$
$$=\frac{1}{(1+i)(-4)}-\frac{2\ln(1+i)}{-8i}=-\frac{1-i}{8}+\frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}\right),$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2},1-i\right)=\left(\frac{d}{dz}\frac{\ln z}{\left(z-(1+i)\right)^2}\right)\Bigg|_{z=1-i}=\left(\frac{1}{z}\frac{1}{\left(z-(1+i)\right)^2}-\frac{2\ln z}{\left(z-(1+i)\right)^3}\right)\Bigg|_{z=1-i}=$$
$$=\frac{1}{(1-i)(-4)}-\frac{2\ln(1-i)}{8i}=-\frac{1+i}{8}-\frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2}+\frac{7\pi i}{4}\right).$$

Мы приходим к равенству

$$\int\limits_{\Gamma_{rR}} \frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}-\frac{3\pi}{8}\right).$$

Поскольку $\int\limits_{C_r} \frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\,dz \underset{r\to+0}{\longrightarrow} 0,\ \int\limits_{C_R} \frac{\ln z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\,dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, то предельный переход дает равенство

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\,dx-\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x+2\pi i}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\,dx = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}-\frac{3\pi}{8}\right),$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8}.$$

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}\, dx$.

Здесь интегрирование по контуру Γ_{rR} дает равенство

$$\int\limits_{\Gamma_{rR}} \frac{\ln^3 z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\, dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{\ln^3 z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}, 1+i \right) + \operatorname{Res}\left(\frac{\ln^3 z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}, 1-i \right)\right).$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln^3 z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}, 1+i \right) = \left.\left(\frac{d}{dz}\left(\ln^3 z \frac{1}{\left(z-(1-i)\right)^2} \right)\right)\right|_{z=1+i} =$$

$$= \left.\left(\frac{3\ln^2 z}{z} \frac{1}{\left(z-(1-i)\right)^2} - \ln^3 z \frac{2}{\left(z-(1-i)\right)^3} \right)\right|_{z=1+i} =$$

$$= -\frac{3}{4(1+i)}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \right)^2 + \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \right)^3 =$$

$$= -\frac{3}{8}(1-i)\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \right)^2 + \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \right)^3.$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln^3 z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}, 1-i \right) = \left.\left(\frac{d}{dz}\left(\ln^3 z \frac{1}{\left(z-(1+i)\right)^2} \right)\right)\right|_{z=1-i} =$$

$$= \left.\left(\frac{3\ln^2 z}{z} \frac{1}{\left(z-(1+i)\right)^2} - \ln^3 z \frac{2}{\left(z-(1+i)\right)^3} \right)\right|_{z=1-i} =$$

$$= -\frac{3}{4(1-i)}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4} \right)^2 - \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4} \right)^3 =$$

$$= -\frac{3}{8}(1+i)\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4} \right)^2 - \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4} \right)^3.$$

$$\int\limits_{\Gamma_{rR}} \frac{\ln^3 z}{\left(z^2-2z+2\right)^2}\, dz =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{3}{8}(1-i)\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \right)^2 + \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} \right)^3 - \frac{3}{8}(1+i)\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4} \right)^2 - \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2} + \frac{7\pi i}{4} \right)^3 \right).$$

Предельный переход дает в левой части равенства интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^3 x - (\ln x + 2\pi i)^3}{(x^2-2x+2)^2} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{6\pi i \ln^2 x - 12\pi^2 \ln x - 8\pi^3 i}{(x^2-2x+2)^2} dx .$$

Интересующий нас интеграл входит в состав мнимой части. Равенство мнимых частей имеет вид

$$-\int_0^{+\infty} \frac{6\pi \ln^2 x - 8\pi^3}{(x^2-2x+2)^2} dx =$$

$$= \mathrm{Re}\left(2\pi\left(-\frac{3}{8}(1-i)\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}\right)^2 + \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi i}{4}\right)^3 - \frac{3}{8}(1+i)\left(\ln\sqrt{2}+\frac{7\pi i}{4}\right)^2 - \frac{1}{4i}\left(\ln\sqrt{2}+\frac{7\pi i}{4}\right)^3\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(-\frac{3}{8}\left(2\ln^2\sqrt{2} - \frac{25\pi^2}{8}\right) + \frac{9\pi}{8}\ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{9\pi}{2}\ln^2\sqrt{2} + \frac{171\pi^3}{32}\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{3}{4}\ln^2\sqrt{2} + \frac{75\pi^2}{64} + \frac{9\pi}{8}\ln\sqrt{2} - \frac{9\pi}{8}\ln^2\sqrt{2} + \frac{171\pi^3}{128}\right) = .$$

Поскольку

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2-2x+2)^2} dx = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{8},$$

то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(x^2-2x+2)^2} dx =$$

$$= \frac{4}{3}\pi^2\left(\frac{1}{4}+\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\ln^2\sqrt{2} - \frac{75\pi^2}{64} - \frac{9\pi}{8}\ln\sqrt{2} + \frac{9\pi}{8}\ln^2\sqrt{2} - \frac{171\pi^3}{128}\right) =$$

$$-\frac{11}{192}\pi^2 + \frac{7}{128}\pi^3 - \frac{3}{8}\pi\ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\ln^2\sqrt{2} + \frac{3}{8}\pi\ln^2\sqrt{2}.$$