Лекции 8-9. 23.10.2024

Глава IV. Ряды Лорана и изолированные особые точки

§ 1. Понятие ряда Лорана

1⁰. Определение

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(z - z_0\right)^{-n} \qquad (1)$$

(z_0 — точка на комплексной плоскости, c_n — комплексные числа) называется рядом Лорана.

Ряд Лорана — соединение двух рядов, стоящих справа в формуле (1).

Ряд Лорана называется сходящимся, если оба эти ряда сходятся.

В случае сходимости положим

$$f_1 : \ f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n , \qquad (2)$$

$$f_2 : \ f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(z - z_0\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{\left(z - z_0\right)^n} . \qquad (3)$$

Ряд (2) называется правильной, а (3) — главной частью ряда Лорана (1), функция

$$f = f_1 + f_2$$

называется суммой ряда Лорана (1).

2⁰. Ряд (2) — степенной. Пусть $R > 0$ — его радиус сходимости. Функция f_1 голоморфна в круге $K_R\left(z_0\right)$.

Рассмотрим степенной ряд

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n . \qquad (5)$$

Пусть $\rho > 0$ — его радиус сходимости, g — его сумма. Функция g голоморфна в круге $|\zeta| < \rho$.

Заметив, что

$$f_2(z) = g\left(\frac{1}{z-z_0}\right),$$

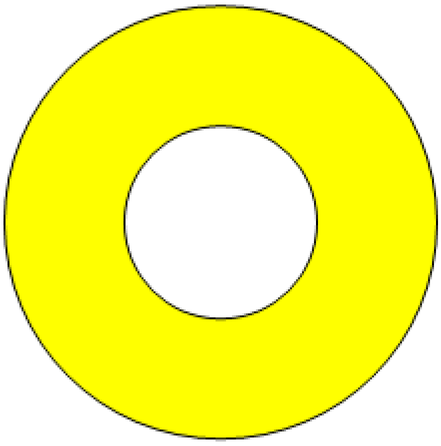
приходим к выводу, что f_2 голофорфна в области

$$|z-z_0| > \frac{1}{\rho} = r$$

(голоморфна во внешности круга).

Если $r < R$, сумма ряда Лорана голоморфна в кольце

$$K_{r,R}(z_0) = \{z \mid r < |z-z_0| < R\}.$$



1) Ряд Лорана абсолютно сходится во внутренних точках кольца, расходится во внешних точках. В граничных точках может наблюдаться как сходимость (абсолютная или условная), так и расходимость.

2) Ряд Лорана равномерно сходится на замкнутом кольце $\bar{K}_{r_1,R_1}(z_0)$ ($r < r_1 < R_1 < R$), т.е. равномерно сходится внутри кольца $K_{r,R}(z_0)$.

3) Может случиться, что $R = +\infty,\ r = 0$.

4) Если $c_1 = c_2 = \dots = 0$, т.е. правильная часть состоит из одного члена c_0, то полагают $f(\infty) = c_0$ и говорят, что f голоморфна в окрестности ∞.

§ 2. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана

Теорема 3.

Пусть f голоморфна в кольце $K_{r,R}(z_0) = \{z \mid r < |z-z_0| < R\}$.

Тогда f единственным образом разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \tag{2}$$

где $r < \rho < R,\ C_\rho : |z-z_0| = \rho$ — окружность радиуса и ρ с центром z_0.

Доказательство.

1) Из интегральной теоремы Коши для многосвязной области следует, что интегралы в (2) не зависят от ρ .

2) **Единственность разложения**.

Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ в некотором кольце $r<|z-z_0|<R$, $r<\rho<R$, тогда ряд равномерно сходится на окружности Γ_ρ радиуса ρ с центром в точке z_0 и его можно интегрировать почленно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(\zeta-z_0)^{k-n-1}d\zeta=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}(\zeta-z_0)^{k-n-1}d\zeta=c_n$$

(в последней сумме ненулевым оказывается только одно слагаемое, для которого $k-n-1=-1$, т.е. $k=n$).

Итак, функция может представляться только рядом Лорана с коэффициентами из формул (2).

3) Возможность разложения. Пусть c_n вычисляются по формулам (2), $r<r_1<R_1<R$, $z\in K_{r_1,R_1}(z_0)$. По интегральной формуле Коши для многосвязной области

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta\,. \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^+}\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{R_1}^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\,(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\end{aligned} \tag{4}$$

($\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|=\dfrac{|z-z_0|}{R_1}<1$, ряд равномерно сходится),

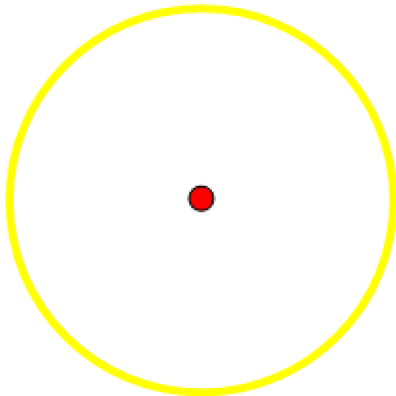
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta&=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}^+}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}d\zeta=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}^+}\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}^+}f(\zeta)(\zeta-z_0)^n\,d\zeta\,\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n-1}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}\end{aligned} \tag{5}$$

($\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{r_1}{|z - z_0|} < 1$, ряд равномерно сходится).

Из (3), (4), (5) получаем (1). Формула (1) справедлива в кольце $K_{r_1,R_1}(z_0)$. Поскольку такие кольца исчерпывают основное кольцо $K_{r,R}(z_0)$, то соотношение (1) имеет место во всем кольце $K_{r,R}(z_0)$. (для любой точки $z \in K_{r,R}(z_0)$ можно так подобрать $r_1,\ R_1$, что $z \in K_{r_1,R_1}(z_0)$).

§ 3. Изолированные особые точки. Их классификация

1⁰. Определение. Пусть f голоморфна в проколотой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда z_0 называется изолированной особой точкой функции f.



Примеры.

$\dfrac{1}{z},\ \dfrac{\sin z}{z},\ \ z_0 = 0$.

2⁰. Определение. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f.

Если $\exists \lim\limits_{x \to z_0} f(z) \neq \infty$, z_0 называется устранимой особой точкой функции f	$\dfrac{z^2 - 1}{z - 1},\ z_0 = 1;\ \dfrac{\sin z}{z},\ z_0 = 0$
Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, z_0 называется полюсом функции f.	$\dfrac{1}{z},\ z_0 = 0$
Если f не имеет предела, z_0 называется существенно особой точкой функции f.	$e^{\frac{1}{z}},\ z_0 = 0$

3⁰. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f. Тогда в некотором проколотом круге f разлагается в ряд Лорана.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n},\ 0 < |z - z_0| < R,$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ —правильная часть , $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ — главная часть ряда Лорана.

§ 4. Теорема об устранимой особенности

Теорема 1.

Пусть z_0 — изолированная особая точка голоморфной функции f.

Равносильны условия

1) z_0 — устранимая особая точка;

2) f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки z_0;

3) в разложении Лорана функции f в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть;

4) существует функция $\tilde{f}$, голоморфная в окрестности V точки z_0,

$$\forall z \in \dot{V} \;\; f(z) = \tilde{f}(z).$$

Свойство 4) как раз и означает, что особенность можно устранить, положив $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Доказательство.

$1) \Rightarrow 2)$ очевидно.

$2) \Rightarrow 3)$ Пусть $\forall z \in \dot{V} \; |f(z)| \le M$.

Поскольку для коэффициентов ряда Лорана имеют место формулы

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,\; \Gamma_\rho = \{z \mid |z - z_0| = \rho\}, \tag{1}$$

то

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n} \tag{2}$$

(неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана). В качестве ρ можно взять произвольное, достаточно малое положительное число.

При $n < 0$ правая часть неравенства (2) — б.м. ($\rho \to 0$).Поэтому $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = 0$, ч.т.д.

$3) \Rightarrow 4)$ Условие 3) означает, что лорановское разложение функции f в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\; 0 < |z - z_0| < R. \tag{3}$$

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ имеет ненулевой радиус сходимости, его сумма $\tilde{f}$ голоморфна в круге $K_R(z_0)$ и совпадает с f в проколотом круге.

4) $\Rightarrow$ 1) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_0)$, z_0 — устранимая особая точка функции f.

§ 5. Полюс голоморфной функции

Теорема 1.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f.

Равносильны условия:

1) z_0 — полюс.

2) z_0 — нуль функции $g = \dfrac{1}{f}$ (точнее, z_0 — устранимая особая точка функции g, z_0 — нуль функции $\tilde{g}$, полученной устранением особенности).

3) Существует натуральное число k и функция ψ, голоморфная в окрестности точки z_0, $\psi(z_0) \neq 0$, такие что

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\psi(z) \text{ при } z \neq z_0.$$

4) Главная часть ряда Лорана имеет конечное число ненулевых членов.

5) Для некоторого $k \in \mathbb{N}$ функция $(z-z_0)^k f(z)$ имеет конечный ненулевой предел.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть z_0 — полюс функции f, тогда в некоторой проколотой окрестности этой точки функция не обращается в нуль, можно рассмотреть голоморфную функцию $g = \dfrac{1}{f}$. Для этой функции $g(z) \underset{z\to z_0}{\to} 0$, z_0 — устранимая особая точка, устранение особенности достигается назначением функции g нулевого значения в точке z_0.

2) $\Rightarrow$ 3). z_0 — изолированный нуль функции $\tilde{g}$. Пусть k — порядок этого нуля,

$$\tilde{g}(z) = (z-z_0)^k \varphi(z),$$

где φ голоморфна в некоторой окрестности точки z_0, $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$. По непрерывности $\exists V \ \forall z \in V \ \varphi(z) \neq 0$. $\psi = \dfrac{1}{\varphi}$ голоморфна в V, $\psi(z_0) \neq 0$,

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\psi(z),\quad z\in\dot{V}$$

3) $\Rightarrow$ 1).получается очевидным образом.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть

$$\psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m(z-z_0)^m,\ d_0\neq 0,$$

тогда

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}d_m(z-z_0)^{m-k}=\sum_{n=-k}^{\infty}d_{n+k}(z-z_0)^n,$$

в главной части ряда Лорана конечное число членов.

4) $\Rightarrow$ 3). Пусть

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ 0<|z-z_0|<R,\ c_{-k}\neq 0.$$

Умножая ряд Лорана $\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ на $(z-z_0)^k$, мы получаем степенной ряд

$$\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+k}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-k}(z-z_0)^n,$$

сходящийся в круге $|z-z_0|<R$, сумма $\psi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_{m-k}(z-z_0)^m$ этого ряда голоморфна в круге сходимости, $\psi(z_0)=c_{-k}\neq 0$ и в окрестности точки z_0

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\psi(z).$$

3) $\Rightarrow$ 5). $(z-z_0)^k f(z)=\psi(z)\underset{z\to z_0}{\to}\psi(z_0)\neq 0,\infty$.

5) $\Rightarrow$ 3).Условие 5) означает, что функция $\psi(z)=(z-z_0)^k f(z)$ имеет устранимую особенность.

Полагая $\psi(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\neq 0$ получаем функцию из условия 3).

Определение.

Пусть z_0 — полюс голоморфной функции f.

Номер старшего ненулевого коэффициента главной части ряда Лорана называется порядком полюса. Полюс первого порядка называется простым.

$$z_0 \text{ — полюс } k \text{-го порядка} \Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,\ c_{-k}\neq 0.$$

Теорема 2.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f.

Равносильны условия

1) z_0 — полюс k-го порядка.

2) z_0 — нуль k-го порядка для $g=\dfrac{1}{f}$.

3) $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^k}\psi(z)$, ψ голоморфна в окрестности точки z_0, $\psi(z_0)\neq 0$.

4) $\exists \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\neq 0,\infty$.

Доказательство проведено выше..

§ 6. Существенно особая точка

Теорема 1.

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции f.

Для того, чтобы z_0 была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана содержала бесконечное число ненулевых членов.

Теорема 2. Теорема Сохоцкого.

Пусть z_0 — существенно особая точка функции f.

Тогда для любой окрестности V точки z_0 множество $f(\dot{V})$ всюду плотно в $\mathbb{C}$, т.е.

$$\forall w\in\mathbb{C}\ \forall\varepsilon>0\ \exists z\in\dot{V}\ \left|f(z)-w\right|<\varepsilon.$$

Доказательство.

Допустим противное. Для некоторой окрестности V точки z_0 и некоторого $w\in\mathbb{C}$ и $\varepsilon>0$ имеем

$$\left|f(z)-w\right|\geq\varepsilon \text{ при всех } z\in\dot{V}$$

Функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w}$ голоморфна и ограничена на $\dot{V}$, z_0 — устранимая особая точка функции g. Поскольку

$$f(z)=w+\frac{1}{g(z)},$$

то z_0 — устранимая особая точка или полюс функции f, что противоречит условию.

Теорема Пикара.

В любой проколотой окрестности существенно особой точки голоморфная функция принимает все комплексные значения, за исключением, может быть, одного. (Без доказательства).

Примеры.

$e^{1/z}$ в любой окрестности нуля принимает все значения, кроме нулевого, $\sin z$ в любой окрестности ∞ принимает все значения.

§ 7 ∞ как изолированная особая точка

Определение.

Если f голоморфна во внешности некоторого круга, то ∞ называется изолированной особой точкой функции f.

В такой ситуации нуль является изолированной особой точкой функции $g(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$.

Если f имеет конечный ненулевой предел при $z\to\infty$, говорят, что f имеет на бесконечности устранимую особенность ($\dfrac{z+1}{z+2}$); ∞ является полюсом для f, если $f(z)\underset{z\to\infty}{\to}\infty$ ($2z+1$), и существенной особенностью, если предел не существует (e^z, $\sin z$).

Тип особой точки ∞ для f совпадает с типом особой точки 0 для g

Пусть ∞ — изолированная особая точка функции f, f голоморфна в области $|z|>R$. f можно представить рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n},$$

первый ряд — главная, второй — правильная части ряда Лорана.

Для функции g имеем

$$g(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\zeta^n.$$

Как и в случае особенности в конечной точке, ∞ — устранимая особая точка в том и только в том случае, если в разложении Лорана функции f отсутствует главная часть; ∞ — полюс, если главная часть ряда Лорана состоит из конечного числа членов; ∞ — существенно особая точка, если главная часть содержит бесконечно много ненулевых членов.

В случае полюса номер старшего ненулевого члена главной части ряда Лорана называется порядком полюса.