ЛЕКЦИЯ 7 16.10.2024

§ 7. *Основные элементарные функции*

1^0. Показательная (экспоненциальная), тригонометрические и гиперболические функции.

На вещественной прямой показательная функция разлагается в степенной ряд

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Положим по определению

$$\exp z = e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{Z}\ .$$

Определена целая функция. В силу теоремы единственности существует только одна целая функция, совпадающая с e^x на вещественной прямой.

Проведенная операция называется аналитическим продолжением функции с вещественной прямой на комплексную плоскость.

Повторяя процедуру для тригонометрических и гиперболически функций получаем пять определений целых функций:

I $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \ z \in \mathbb{C}$

II $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \ z \in \mathbb{C}$

III $\operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \ z \in \mathbb{C}$

IV $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \ z \in \mathbb{C}$

V $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\ \ z \in \mathbb{C}$

Отметим важнейшие свойства введенных функций.

1) **Производная**

$$\left(e^z\right)' = e^z\ ,$$

$$\left(\operatorname{ch} z\right)' = \operatorname{sh} z,\ \left(\operatorname{sh} z\right)' = \operatorname{ch} z;\ \left(\cos z\right)' = -\sin z,\ \left(\sin z\right)' = \cos z\ .$$

Действительно,

$$e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \left(e^z\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z\ .$$

2) Основное тригонометрическое тождество

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Рассмотрим целые функции

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z,\ g(z) = 1.$$

Поскольку $f = g$ на $\mathbb{R}$, то по теореме единственности $f = g$.

3) Теорема сложения: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ **.**

Доказательство. Известно, что

$$\forall x_1, x_2 \qquad e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}\ . \tag{*}$$

Фиксируем произвольное $x_2 \in \mathbb{R}$ и рассмотрим голоморфные функции

$$f(z) = e^{z+x_2} \text{ и } g(z) = e^z e^{x_2}\ .$$

Равенство (*) означает совпадение этих функций на вещественной прямой. По теореме единственности $f = g$,

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}\ \forall x_2 \in \mathbb{R}\ \ e^{z_1+x_2} = e^{z_1}e^{x_2}\ . \tag{**}$$

Фиксируем произвольное $z_1 \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим голоморфные функции

$$f(z) = e^{z_1+z} \text{ и } g(z) = e^{z_1}e^z\ .$$

Равенство (**) означает совпадение этих функций на вещественной прямой. По теореме единственности $f = g$,

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ \ e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}\ .$$

Аналогичными средствами получаем формулы для косинуса и синуса суммы и разности.

4) Связь тригонометрических и гиперболических функций

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z,\ \operatorname{ch}(iz) = \cos z\ ,$$

$$\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}\,z,\ \mathrm{sh}(iz) = i\sin z\,.$$

5) **Формулы Эйлера**

$$\mathrm{ch}\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \mathrm{sh}\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ e^z = \mathrm{ch}\,z + \mathrm{sh}\,z\,;$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

Теорема сложения и последнее равенство позволяют описать экспоненциальную функцию комплексного переменного в терминах функций элементарной математики:

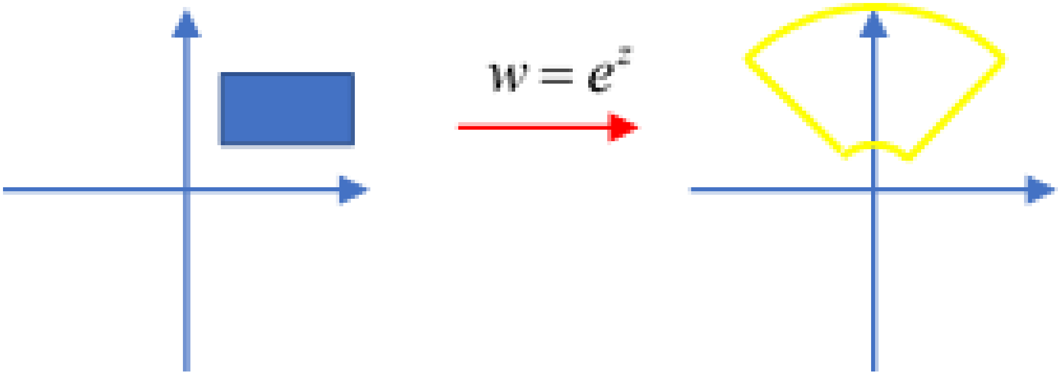
$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i\sin y)\,.$$

6) **Периодичность:** $e^{z+2\pi i} = e^z$ **.**

7) **Геометрическое описание преобразования** $w = e^z$ **.** Положим $z = x + iy,\ w = \rho e^{i\theta}$, тогда $\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy};\ \rho = e^x,\ \theta = y\,.$

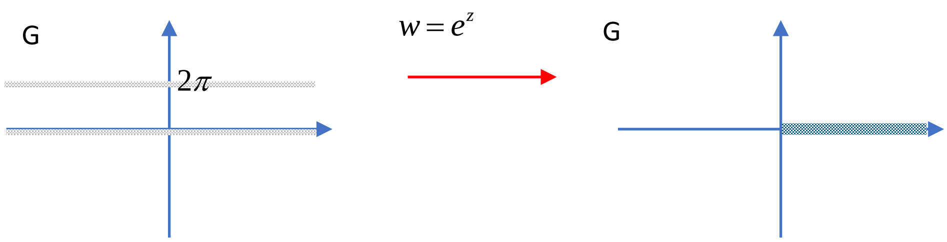
Прямая $y = y_0$ преобразуется в луч $\theta = y_0$, прямая $x = x_0$ — в окружность $\rho = e^{x_0}$, пробегаемую бесконечное число раз, открытая дуга в 2π взаимно однозначно преобразуется в окружность, лишенную одной точки.

Прямоугольник $a < x < b,\ c < y < d\ (d - c \le 2\pi)$ взаимно однозначно и конформно отображается на сектор $e^a < \rho < e^b,\ c < \theta < d$.



Полоса $0 < \mathrm{Im}\,z < \pi$ преобразуется в верхнюю полуплоскость.

Полоса $0 < \mathrm{Im}\,z < 2\pi$ преобразуется в $\mathbb{C}$ с разрезом $[0, +\infty)$.



2^0. Логарифмическая функция.

Определение

$$w = \mathrm{Ln}\, z \Leftrightarrow e^w = z$$

$$z \neq 0,\ z = re^{i\varphi},\ \ w = \ln r + i\left(\varphi + 2\pi k\right),\ \ \mathrm{Ln}\, z = \ln\left|z\right| + i\,\mathrm{Arg}\, z\,.$$

Определение. G — область, $0 \notin G$.

1) Непрерывная функция φ называется ветвью аргумента в области G, если

$$\forall z \in G\ \ \varphi\left(z\right) = \mathrm{Arg}\, z\,.$$

2) Непрерывная функция f называется ветвью логарифма в области G, если

$$\forall z \in G\ \ f\left(z\right) = \mathrm{Ln}\, z\,.$$

Задачи.

1) Если φ — ветвь аргумента, то $\varphi_k = \varphi + 2\pi k$ — всевозможные ветви аргумента.

2) Если φ — ветвь аргумента, то $f\left(z\right) = \ln\left|z\right| + i\varphi\left(z\right)$ — ветвь логарифма.

3) Если f — ветвь логарифма, то $\varphi = \mathrm{Im}\, f$ — ветвь аргумента.

Главные ветви аргумента и логарифма.

G — комплексная плоскость с разрезом $\left(-\infty,\ 0\right]$. Для $z \in G$ можно написать представление $z = re^{i\alpha}$, $r > 0,\ \alpha \in \left(-\pi,\ \pi\right)$.

Положим $\arg z = \alpha$ и назовем построенную функцию главной ветвью аргумента в области G.

Запишем явные формулы для вычисления значений главной ветви аргумента:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x},\ x > 0, \\ \mathrm{arcctg}\, \dfrac{x}{y},\ y > 0, \\ \mathrm{arcctg}\, \dfrac{x}{y} - \pi,\ y < 0. \end{cases}$$

Функцию $w = \ln z = \ln\left|z\right| + i\arg z$ назовем главной ветвью логарифма в $\mathbb{C} \setminus \left(-\infty,\ 0\right]$. Для этой функции (в полуплоскости $x > 0$)

$$u=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right),\ v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2};$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Условия Коши-Римана выполнены,

$$\left(\ln z\right)'=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{1}{z}.$$

На интервале $\left(0,2\right)$ логарифмическая функция разлагается в степенной ряд по степеням $\left(x-1\right)$:

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(x-1\right)^n}{n},\ x\in\left(0,2\right).$$

Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(z-1\right)^n}{n}$ определяет в круге $\left|z-1\right|<1$ голоморфную функцию, совпадающую на $\left(0,2\right)$ с логарифмической. По теореме единственности

$$\ln z=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\left(z-1\right)^n}{n},\ \left|z-1\right|<1.$$

$$\text{VI}\ \ln\left(1+z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{z^n}{n},\ \left|z\right|<1$$

3⁰. Корень n-й степени. Если f — ветвь логарифма, то $\psi\left(z\right)=e^{\frac{1}{n}f\left(z\right)}$ — ветвь корня,

$$\psi'\left(z\right)=\frac{\psi\left(z\right)}{nz}=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\psi\left(z\right)\right)^{n-1}},\ \left(\sqrt[n]{z}\right)'=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}}.$$

4⁰. Степенная функция с вещественным показателем

Главная ветвь степенной функции определяется в области $\mathbb{C}\setminus\left(-\infty,\,0\right]$ соотношением

$$z^{\mu}=e^{\mu\ln z}.$$

Степенная функция представляется степенным рядом

$$\text{VII}\ \left(1+z\right)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu\left(\mu-1\right)\cdots\left(\mu-n+1\right)}{n!}z^n,\ \left|z\right|<1.$$

(В левой и правой частях равенства стоят голоморфные в единичном круге функции. Равенство уже установлено на интервале $(-1,1)$. По теореме единственности равенство справедливо на всем единично круге.

5⁰. Общее понятие степени

$$c^d = \exp(d \operatorname{Ln} c),\ c \neq 0 .$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},\ |z| < 1$$

Как правило, степень имеет бесконечно много значений. Если d — целое число, степень имеет единственное значение; если d — рациональное число — конечное число значений.

В смысле только что принятого определения e^z имеет бесконечное число значений. Однако принято использовать запись e^z в ранее определенном смысле:

$$\exp z = e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{Z} .$$