Лекция 5 02.10.2024

Глава III. Комплексные степенные ряды

§ 1. Понятие степенного ряда

1⁰. Определение.

Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n \tag{1}$$

(z_0 — точка на комплексной плоскости, $c_0,\ c_1, \ldots \in \mathbb{C}$), состоящий из степенных функций, называется степенным рядом (с центром разложения z_0 и коэффициентами $c_0,\ c_1, \ldots \in \mathbb{C}$).

2⁰. Теорема 1.

Существует и единственно такое число $R \in \left[0,\ +\infty\right]$, что

1) $\forall z\ \left|z - z_0\right| < R \Rightarrow$ ряд абсолютно сходится в точке z ,

2) $\forall z\ \left|z - z_0\right| > R \Rightarrow$ ряд расходится в точке z , нарушено необходимое условие сходимости.

Доказательство.

Рассмотрим вещественный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n\right| t^n\ . \tag{2}$$

Пусть R — его радиус сходимости. Убедимся в том, что число R обладает свойствами 1), 2).

Пусть $t = \left|z - z_0\right| < R$, тогда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n\right| t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|c_n\right| \left|z - z_0\right|^n$ сходится, т.е. (1) абсолютно сходится;

пусть $t = \left|z - z_0\right| > R$, тогда $\left|c_n\right| t^n = \left|c_n\right| \left|z - z_0\right|^n \not\to 0$, для ряда (1) нарушено необходимое условие сходимости.

Единственность не вызывает сомнений.

Определение.

Число $R \in \left[0,\ +\infty\right]$, обладающее свойствами 1), 2), называется радиусом сходимости степенного ряда (1).

Определение.

Круг

$$K_R(z_0)=\{z \mid |z-z_0|<R\}$$

называется кругом сходимости степенного ряда (1).

Во внутренних точках круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится, во внешних точках ряд расходится, в граничных точках ряд может как сходиться (абсолютно или условно), так и расходиться.

Для радиуса сходимости можно написать формулы

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},\ \ \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\,. \tag{4}$$

(при условии существования пределов).

В общем случае имеет место формула Коши-Адамара

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\,. \tag{5}$$

3^0. Теорема 2.

Пусть $R>0$ — радиус сходимости ряда (1), $0<r<R$.

Тогда (1) равномерно сходится на замкнутом круге $\bar{K}_r(z_0)$,

т.е. $\sup\limits_{z\in\bar{K}_r(z_0)}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}c_k(z-z_0)^k\right|\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Следствие.

Степенной ряд равномерно сходится на любом компакте K, лежащем в круге сходимости.

Действительно, круги $\{K_r(z_0)\}_{0<r<R}$ образуют открытое покрытие компакта K. Возьмем конечное подпокрытие $K_{r_1}(z_0),\ldots,K_{r_m}(z_0)$ и положим $r=\max\{r_1,\ldots,r_m\}$. Компакт содержится в круге $K_r(z_0)$, на котором ряд равномерно сходится.

Определение.

Говорят, что функциональный ряд равномерно сходится внутри области, если он равномерно сходится на любой компактной части этой области.

Степенной ряд равномерно сходится внутри круга сходимости.

§ 2. Почленное дифференцирование степенного ряда

Теорема 1.

Сумма степенного ряда — функция, голоморфная на круге сходимости. Производную можно найти почленным дифференцированием степенного ряда.

Пусть степенной ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \tag{1}$$

имеет радиус сходимости $R>0$, f — сумма этого ряда.

Тогда

1) степенной ряд

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-z_0)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n, \tag{2}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (1), имеет тот же радиус сходимости R,

2) сумма φ ряда (2) является производной функции f на круге сходимости,

3) функция f голоморфна на круге сходимости.

Доказательство.

Утверждение о радиусе сходимости доказано в вещественном анализе.

Пусть z_1 — точка круга сходимости, покажем, что $f'(z_1)=\varphi(z_1)$.

Подберем число r так, чтобы $|z_1-z_0|<r<R$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}$ сходится.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Найдется такой номер n_0, что $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}<\dfrac{\varepsilon}{4}$.

$\forall z\ 0<|z-z_0|<r,\ z\neq z_1$

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}-\varphi(z_1)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1}-n(z_1-z_0)^{n-1}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\Big((z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z_1-z_0)+\dots+(z_1-z_0)^{n-1}-n(z_1-z_0)^{n-1}\Big)=$$

$$=\sum_{n=1}^{n_0}\dots+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\dots.$$

$$\sum_{n=1}^{n_0}\cdots \underset{z\to z_1}{\to} 0,\ \exists\delta>0\ |z-z_1|<\delta \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{n_0}\cdots\right|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\cdots\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|c_n|\left(|z-z_0|^{n-1}+\cdots+|z_1-z_0|^{n-1}+n|z_1-z_0|^{n-1}\right)\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty}2n|c_n|r^{n-1}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$|z-z_1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}-\varphi(z_1)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}\underset{z\to z_1}{\to}\varphi(z_1),\ f'(z_1)=\varphi(z_1).$$

Следствие 1.

Функция

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1},\ |z-z_0|<R$$

является первообразной для f на круге сходимости.

Следствие 2.

Функция f имеет производные всех порядков, их можно найти почленным дифференцированием.

Следствие 3.

Если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|<\rho,$$

то

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0),\ n=0,1,2,\ldots$$

Определение.

f — голоморфная функция в области G, $z_0\in G$. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции f с центром разложения z_0.

Дополнение

Вторая теорема Абеля.

Степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n . \qquad (1)$$

Может сходиться в точках окружности круга сходимости. Можем считать, что функция f определяется в таких точках формулой (1).

Теорема. Если степенной ряд (1) сходится в точке z_1 окружности круга сходимости, то его сумма $f(z)$ стремится к пределу $f(z_0)$, когда $z \to z_1$, оставаясь на радиусе $z_0 z_1$.

Другими словами, сумма f ряда (1) непрерывна в точке z_1 вдоль соответствующего радиуса круга сходимости.

§ 3 Разложение голоморфной функции в степенной ряд

Начнем с двух простых замечаний.

1) Для всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z} .$$

Действительно, для таких z равенство получается предельным переходом в соотношении

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$$

2) Равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать. Если $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ и ряд равномерно сходится на носителе пути γ, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz .$$

Действительно, равномерная сходимость означает, что $\rho_n = \sup\limits_{t \in [a,\, b]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(\gamma(t)) \right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\,dz \right| \le \rho_n l(\gamma) \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Теорема 1.

Пусть f — голоморфная функция в области G, $z_0 \in G$, $K_R\left(z_0\right) \subset G$.

Тогда в круге $K_R\left(z_0\right)$ функция f единственным образом разлагается в степенной ряд

$$f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n . \tag{1}$$

Для коэффициентов справедливы формулы

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(z_0\right), \tag{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta - z_0\right)^{n+1}} d\zeta , \tag{3}$$

где Γ — простой замкнутый контур в $K_R\left(z_0\right)$, во внутренности которого лежит точка z_0.

Доказательство. Формулы (2) получены в предыдущем параграфе. Тем самым установлена единственность.

Формулы (3) — это интегральные выражения для производных голоморфной функции. В доказательстве теоремы о разложении голоморфной функции в степенной ряд этот факт не используется, так что мы еще раз независимо получим бесконечную дифференцируемость голоморфной функции.

Установим возможность разложения. Пусть $0 < r < R$, Γ_r — окружность радиуса r с центром z_0. По интегральной формуле Коши

$$\forall z \in K_r\left(z_0\right) \quad f\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r^+} \frac{f\left(\zeta\right)}{\zeta - z} d\zeta . \tag{4}$$

Разложим в ряд функцию $\dfrac{1}{\zeta - z}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\left(\zeta - z_0\right) - \left(z - z_0\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - z_0\right)^n}{\left(\zeta - z_0\right)^{n+1}} , \tag{5}$$

поскольку

$$q = \frac{\left|z - z_0\right|}{\left|\zeta - z_0\right|} = \frac{\left|z - z_0\right|}{r} < 1 . \tag{6}$$

Неравенство (6) влечет равномерную (относительно переменной интегрирования ζ) сходимость ряда (5). Равномерная сходимость сохранится после умножения равенства (5) на $f(\zeta)$. Почленное интегрирование ряда дает

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\,(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(z-z_0)^n,$$

где

$$d_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta .$$

Ввиду уже установленной единственности разложения, имеют место равенства $d_n=c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$. Мы еще раз убедились в существовании производных всех порядков.

Видим, что разложение (1) имеет место на любом круге $R_r(z_0)$ и, следовательно, на всем круге $K_R(z_0)$.

В ходе доказательства для коэффициентов ряда получены формулы (3) при специальном выборе контура интегрирования. Но в силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области интеграл от выбора контура не зависит, в формулах (3) мы имеем право брать любой контур, охватывающий точку z .

Теорема доказана.

Следствие

Радиус сходимости ряда Тейлора по степеням $(z-z_0)$ функции, голоморфной в области G, больше или равен расстоянию от z_0 до границы ∂G области.

Мы получили новое описание голоморфной функции.

Теорема 2.

Функция голоморфна в области в том и только в том случае, если каждая точка области обладает окрестностью, в которой функция разлагается в степенной ряд.