Лекции 4 25.09.2024

§ 2. Интегральная теорема Коши

1^0. Теорема 1. G — область, f — голоморфная функция в G, γ_0, γ_1 гомотопны в области G как замкнутые пути.

Тогда

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Условие теоремы означает, что путь γ_1 можно в области G непрерывной деформацией преобразовать в путь γ_2, существует непрерывное отображение $\Gamma:[a,\, b]\times[0,\, 1]\to G$, т.ч.

$$\begin{aligned}&\forall t\in[a,\, b]\ \Gamma(t,0)=\gamma_0(t), \Gamma(t,1)=\gamma_1(t),\\ &\forall s\in[0,\, 1]\ \Gamma(a,\, s)=\Gamma(b,\, s).\end{aligned}$$

Доказательство.

Пусть $f = g + ih$, тогда

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma}(gdx - hdy) + i\int_{\gamma}(hdx + gdy).$$

Условия Коши-Римана $\dfrac{\partial g}{\partial y} = -\dfrac{\partial h}{\partial x},\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ влекут замкнутость дифференциальных форм $gdx - hdy,\ hdx + gdy$. По теореме об интегралах от замкнутой формы по гомотопным путям интегралы по путям γ_0, γ_1 равны**.**

Теорема 2. G — область, f — голоморфная функция в G, γ гомотопен , как замкнутый путь в области G, стационарному пути.

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{2}$$

Теорема 3. Интегральная теорема Коши. G — односвязная область, f — голоморфная функция в G, γ — замкнутый путь в области G.

Тогда

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Замечание. Условие односвязности существенно:

$$\int\limits_{\Gamma^+:|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i\,.$$

2^0. Дополнение. G — область, ограниченная кусочно-гладким простым контуром Γ, f голоморфна в G, непрерывна в $\overline{G}$.

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0\,.$$

Теорема 4. Теорема Коши для многосвязной области.

G — область, ограниченная внешним контуром Γ и внутренними контурами $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$, f голоморфна в G, непрерывна в $\overline{G}$.

Тогда

$$\int\limits_{\partial G} f(z)\,dz = 0,\ \int\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k^+} f(z)\,dz \tag{4}$$

3^0. Теорема 5. О существовании первообразной.

Пусть f — непрерывная функция в области G.

Тогда для существования первообразной в области G необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого пути γ в G

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0\,. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость следует из формулы Ньютона-Лейбница.

Достаточность.

Пусть $f = g + ih$, тогда для любого замкнутого пути γ в G

$$\int\limits_{\gamma} gdx - hdy = 0,\ \int\limits_{\gamma} hdx + gdy = 0\,.$$

По теореме о существовании первообразной дифференциальной формы существуют дифференцируемые функции $G,\ H$, для которых

$$dG = gdx - hdy,\ dH = hdx + gdy$$

Положим $F = G + iH$, тогда

$$\frac{\partial G}{\partial x} = g = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$-\frac{\partial G}{\partial y} = h = \frac{\partial H}{\partial x},$$

функция F удовлетворяет условиям Коши-Римана. Следовательно, F имеет производную

$$F' = \frac{\partial G}{\partial x} + i\frac{\partial H}{\partial x} = g + ih = f .$$

Дополнения. 1) Фиксируем $z_0 \in G$, возьмем путь, соединяющий z_0 с z. Тогда формула

$$F : F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{6}$$

дает первообразную.

2) Первообразная определяется с точностью до постоянной.

Теорема 6. f — голоморфная в односвязной области G функция.

Тогда f имеет первообразную.

Справедлива формула Ньютона Лейбница

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} \tag{7}$$

(здесь F — одна из первообразных).

Односвязность существенна. Так, функция $\frac{1}{z}$, голоморфная в проколотой плоскости $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, не имеет в этой области первообразной, поскольку имеет ненулевой интеграл $2\pi i$ вдоль единичной окружности.

§ 3. Интегральная формула Коши

Теорема 1.

Пусть f — голоморфная функция в односвязной области G, Γ — простой кусочно-гладкий контур в G, z — внутренняя точка контура Γ.

Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta . \tag{1}$$

Значения голоморфной функции во внутренности контура определяются значениями на контуре.

Доказательство. Пусть Γ_r — "маленькая" окружность с центром в точке z.

По теореме Коши для многосвязной области

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\,. \tag{2}$$

В силу непрерывности функции f

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta\underset{r\to+0}{\to}0 \tag{3}$$

($\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |\zeta-z|<\delta\Rightarrow|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, пусть $0<r<\delta$, тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}2\pi r=\varepsilon\text{)}$$

Наконец,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}re^{it}i\,dt=\frac{f(z)}{2\pi i}2\pi i=f(z)\,. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получается, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\underset{r\to+0}{\to}f(z)\,. \tag{5}$$

Предельный переход в (2) дает

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z), \tag{6}$$

интегральную формулу Коши.

Замечание. Можно опустить требование односвязности, но рассматривать только такие контуры Γ, внутренности которых лежат в G.

§ 4. Бесконечная дифференцируемость голоморфной функции

Теорема 1. Пусть f — голоморфная функция в области G.

Тогда f имеет производные всех порядков во всех точках области G.

Если Γ — контур в G, внутренность которого — часть G, а z — точка из внутренности контура, то

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad (1)$$

Доказательство. Существование производных следует из теоремы о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра, формула (1) получается дифференцированием интеграла Коши по параметру.

Для убедительности проверим (еще раз) возможность дифференцирования по параметру.

Пусть $n=1$, покажем, что

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \ . \qquad (2)$$

Обозначим через $I(z)$, интеграл в формуле (2). Фиксируем точку z_0. По интегральной формуле Коши

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} f(\zeta) \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \ ,$$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \ . \qquad (3)$$

Формула (2) получается из (3) предельным переходом, допустимость которого мы сейчас проверим.

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} f(\zeta) \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta \ .$$

Существуют такие $M,\ m > 0$, что $|f(\zeta)| \le M$ при $\zeta \in \Gamma$ и $|\zeta - z_0| \ge m$. При дополнительном условии $|z - z_0| \le \frac{m}{2}$ справедливо неравенство $|\zeta - z| \ge \frac{m}{2}$.

Мы получаем оценку

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - I(z_0) \right| \le \frac{1}{2\pi} M \frac{2}{m^3} l(\Gamma) |z - z_0| \underset{z \to z_0}{\to} 0 \ .$$

Следовательно,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \underset{z \to z_0}{\to} I(z_0),\ f'(z_0) = I(z_0) \ .$$

Доказательство завершается индукцией по n.

§ 5. Некоторые выводы

1^0. Производная голоморфной функции — голоморфная функция.

Справедливость утверждения следует из теоремы о бесконечной дифференцируемости голоморфной функции

2^0. Если функция имеет первообразную, она голоморфна.

Если функция имеет первообразную, она является производной для голоморфной функции и голоморфна по предыдущему утверждению.

3^0. **Теорема Морера.** Пусть f непрерывна в G и для всякого замкнутого пути в G

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 .$$

Тогда f голоморфна в G .

По теореме о существовании первообразной функция f имеет в области G первообразную и оказывается голоморфной по утверждению пункта 2^0.

4^0. **Теорема 1.** G — односвязная область, f — непрерывная функция в G .

Тогда равносильны условия

1) f голоморфна,

2) f имеет первообразную,

3) для любого замкнутого пути в G

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 ,$$

4) $f(z)\,dz = (g\,dx - h\,dy) + i(h\,dx + g\,dy)$ — замкнутая дифференциальная форма.