§ 5 Понятие голоморфной функции

1^0. Определение. Пусть f — комплексная функция комплексного переменного в области G, имеющая непрерывную производную (в комплексном смысле).

f называется голоморфной функцией (аналитической функцией) в области G.

Замечание. Можно доказать, что непрерывность производной следует из ее существования.

2^0. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

Пусть f голоморфна в области G, $z_0 \in G$, $f'(z_0) \neq 0$,

$$\left| f'(z_0) \right| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \text{ —}$$

коэффициент линейного растяжения, производимого отображением f в точке z_0.

Пусть γ — гладкий путь в G, $z_0 = \gamma(t_0),\ w_0 = f(z_0),\ \tilde{\gamma} = f \circ \gamma,\ w_0 = \tilde{\gamma}(t_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0), \\ &\arg \tilde{\gamma}'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0). \end{aligned}$$

Под действием отображения f все пути поворачиваются на угол $\arg f'(z_0)$. Отображение сохраняет углы между путями по величине и ориентации. Такое отображение называется конформным.

Геометрически голоморфность выражается в конформности.

3^0. Степенная функция с натуральным показателем.

$$w = f(z) = z^n,\ f'(z) = nz^{n-1}.$$

f — голоморфная функция.

Пусть $z \neq 0,\ z = re^{i\varphi},\ w = \rho e^{i\theta}$. Тогда $\rho = r^n$, $\theta = n\varphi$.

Луч $\arg z = \varphi_0$ преобразуется в луч $\arg w = n\varphi_0$; дуга окружности $|z| = r_0$ — в дугу окружности $|w| = r_0^n$. Кольцевой сектор $\alpha < \varphi < \beta,\ a < r < b\ \ (\beta - a \leq 2\pi / n)$ взаимно однозначно и конформно преобразуется в сектор $n\alpha < \theta < n\beta,\ \ a^n < \rho < b^n$, в частности, при $n = 2$ верхняя полуплоскость отображается на плоскость с разрезом по положительной вещественной полуоси $[0, +\infty)$.

Глава II. Интегрирование функций комплексного переменного

§ 1. Криволинейный интеграл функции комплексного переменного

1[0] Определение. f — непрерывна в области G, γ — кусочно-гладкий путь в G.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt \tag{1}$$

Пример. $I_n = \int_{\gamma} (z-a)^n\, dz,\ \gamma(t) = a + \mathrm{Re}^{it},\ t\in[0,\ 2\pi]$.

Если $n \neq -1$,

$$I_n = \int_{0}^{2\pi} \left(\mathrm{Re}^{it}\right)^n \mathrm{Re}^{it}\, idt = \int_{0}^{2\pi} R^{n+1}\,\mathrm{e}^{i(n+1)t}\, idt = R^{n+1}\,\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{n+1}\Bigg|_{0}^{2\pi} = 0\,,$$

$$I_{-1} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_{0}^{2\pi} i\,dt = 2\pi i\,.$$

2[0]. $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ **— предел интегральных сумм.**

$$\tau : a = t_0 < \cdots < t_n = b,\ \ s_k \in [t_{k-1},\ t_k],$$

$$z_k = \gamma(t_k),\ \Delta z_k = z_k - z_{k-1},\ \zeta_k = \gamma(s_k),$$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{\lambda_\tau\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\,. \tag{2}$$

3[0]. Сведение $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ **к вещественным криволинейным интегралам.**

Если $f = g + ih$, $\gamma = \varphi + i\psi$, то

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz == \int_{\gamma} (gdx - hdy) + i\int_{\gamma} (hdx + gdy)\,. \tag{3}$$

Действительно,

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt=\int_a^b (g+ih)(\varphi'+i\psi')\,dt=$$
$$=\int_a^b \left((g\varphi'-h\psi')+i(h\varphi'+g\psi')\right)dt=\int_\gamma (gdx-hdy)+i\int_\gamma (hdx+gdy).$$

Комплексный интеграл сведен к вещественным интегралам от дифференциальных форм $gdx-hdy$ и $hdx+gdy$, которые являются вещественной и мнимой частями комплексной дифференциальной формы $fdz=fdx+ifdy$.

4^0. Свойства интеграла: линейность, аддитивность, инвариантность (для эквивалентных путей $\gamma,\tilde\gamma$ имеем равенство интегралов $\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\tilde\gamma} f(z)\,dz$), ориентированность (интегралы по встречным путям взаимно противоположны, $\int_{\gamma_-} f(z)\,dz=-\int_\gamma f(z)\,dz$).

Справедлива оценка

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le\int_\gamma |f(z)||dz|=\int_\gamma |f|\,dl \tag{4}$$

(справа стоит интеграл I рода).

Действительно,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|=\left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right|\le\int_a^b \left|f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|dt=$$
$$\int_a^b \left|f(\gamma(t))\right|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt=\int_\gamma |f|\,dl.$$

Следствие. Если $\forall z\ |f(z)|\le M,\ l(\gamma)$ — длина пути, то

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le M\cdot l(\gamma).$$

5^0 Формула Ньютона-Лейбница. Пусть F — первообразная функции f.

Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что $\left(F(\gamma(t))\right)'=f(\gamma(t))\gamma'(t)$. Поэтому

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{a}^{b} f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,dt = F\left(\gamma(t)\right)\Big|_{a}^{b} = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}\,.$$