Глава I. Функции комплексного переменного. Непрерывность и дифференцируемость

§ 1. Функция комплексного переменного

Определение Пусть $E \subset \mathbb{C}$. Отображение $f : E \to \mathbb{C}$ называется функцией комплексного переменного.

Функции

$$g = \operatorname{Re} f : g(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy),$$
$$h = \operatorname{Im} f : h(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy), \ (x + iy \in E)$$

называются вещественной и мнимой частями функции f.

Полагая $w = f(z),\ u = g(x, y),\ v = h(x, y)$, можно написать $z = x + iy,\ w = u + iv$.

В проведенных построениях используется каноническое отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, действующее по формуле $(x, y) \mapsto z = x + iy$.

Примеры

1) $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$.

2) $w = \overline{z} = x - iy,\ u = x,\ v = -y$.

3) $w = \operatorname{Re} z = x,\ u = x,\ v = 0$.

4) $w = \operatorname{Im} z = y,\ u = 0,\ v = y$.

§ 2. Непрерывные функции комплексного переменного.

Пусть $E \subset \mathbb{C}$, f — функция на E, z_0 — предельная точка E.

Определение 1. Число $C \in \mathbb{C}$ называется пределом функции f,

$$f(z) \underset{z \to z_0}{\to} C,\ C = \lim_{z \to z_0} f(z),$$

если выполнены следующие (равносильные) условия:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - C| < \varepsilon$,

2) $\forall \{z_n\}_{n=1}^{\infty}\ z_n \in E,\ z_n \underset{n \to \infty}{\to} z_0,\ z_n \neq z_0 \Rightarrow f(z_n) \underset{n \to \infty}{\to} C$.

Теорема 1. Пусть $g = \operatorname{Re} f$, $h = \operatorname{Im} f$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $C = A + iB$.

Тогда

$$f(z) \underset{z\to z_0}{\to} C \Leftrightarrow g(x,y) \underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{\to} A,\ h(x,y) \underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{\to} B$$

Теорема позволяет распространить теорию пределов на комплексный случай.

Определение 2. Пусть $z_0 \in E$.

Функция f называется непрерывной в точке z_0, если выполнены следующие (равносильные) условия:

1) $f(z) \underset{z\to z_0}{\to} f(z_0)$,

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Теорема 2.

f непрерывна в точке z_0 $\Leftrightarrow$ $g,\ h$ непрерывны в точке $(x_0,\ y_0)$.

Рассмотренные в § 1 функции непрерывны.

Свойства непрерывных функций.

1) Непрерывная функция локально ограничена.

2) Арифметические операции над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям.

3) Композиция непрерывных функций — непрерывная функция.

4) Функция, непрерывная на компакте, ограничена.

5) Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.

§ 3. Дифференцируемые функции комплексного переменного

1^0. Определение. Пусть f определена в окрестности точки z_0.

1) $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ — производная.

2) f называется дифференцируемой (в комплексном смысле), если

$\exists C \quad f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = C \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z)$, где $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$, т.е. $\dfrac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \underset{\Delta z\to 0}{\to} 0$.

Примеры.

1) $f(z)=z^2$, $z_0=0$, $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2-0^2}{z-0}=\lim\limits_{z\to 0} z=0$.

2) $f(z)=\overline{z}$, $z_0=0$, $\dfrac{\overline{z}}{z}$ не имеет предела при $z\to 0$, функция не имеет производной.

Требование комплексной дифференцируемости существенно выше вещественного аналога. Комплексная дифференцируемость означает, что главная часть приращения (дифференциал) — линейная (в комплексном смысле) функция. Линейное отображение $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & \beta \\ b & \alpha \end{pmatrix}$, а умножению на комплексное число (т.е. линейному с комплексной точки зрения отображению) отвечает матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2^0. **Теорема 1.**

$$f \text{ дифференцируема в точке } z_0 \;\Rightarrow\; f \text{ непрерывна в точке } z_0 .$$

Теорема 2.

$$f \text{ дифференцируема в точке } z_0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ имеет производную в точке } z_0 ,$$

$$C=f'(z_0),$$

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\cdot\Delta z+o(\Delta z).$$

3^0. Правила дифференцирования.

1) $(C)'=0,\ z'=1,\ (z^n)'=n\,z^{n-1}$.

2) $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$, $(f\,g)'=f\,g'+f'\,g$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$.

3) $F(z)=f(\varphi(z)),\ F'(z)=f'(\varphi(z))\cdot\varphi'(z);\ F(t)=f(\gamma(t)),\ F'(t)=f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.

§ 4. Условия Коши-Римана

Параграф посвящен установлению связи между вещественной и комплексной дифференцируемостью. Комплексная дифференцируемость означает, что в дополнение к вещественной дифференцируемости выполнены условия Коши-Римана.

1^0. Теорема 1.

Пусть функция $f=g+ih$ определена в окрестности точки $z_0=x_0+iy_0$.

Тогда

f дифференцируема (в комплексном смысле) в точке z_0 $\Leftrightarrow$ $g,\, h$ дифференцируемы в точке $\left(x_0,\, y_0\right)$ и выполнены условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = -\dfrac{\partial h}{\partial x}. \end{cases} \tag{1}$$

При этом

$$f'\left(z_0\right) = \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2}$$

Если положить $w = f\left(z\right),\; w = u + iv$, то условия Коши-Римана примут традиционный вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Необходимость.

$f'\left(z_0\right) = C = A + iB$,

$$f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right) = C \cdot \Delta z + \alpha\left(\Delta z\right),\; \alpha\left(\Delta z\right) \underset{\Delta z \to 0}{=} o\left(\Delta z\right). \tag{3}$$

На вещественном языке получаем

$$\begin{gathered} \begin{cases} g\left(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y\right) - g\left(x_0,\, y_0\right) = A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y + \alpha_1\left(\Delta x,\, \Delta y\right), \\ h\left(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y\right) - h\left(x_0,\, y_0\right) = B \cdot \Delta x + A \cdot \Delta y + \alpha_2\left(\Delta x,\, \Delta y\right), \end{cases} \\ \alpha_1\left(\Delta x,\, \Delta y\right),\; \alpha_2\left(\Delta x,\, \Delta y\right) = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Соотношения (4) означают вещественную дифференцируемость функций g и h в точке $\left(x_0,\, y_0\right)$, при этом

$$\begin{gathered} \frac{\partial g}{\partial x} = A = \frac{\partial h}{\partial y}, \\ -\frac{\partial g}{\partial y} = B = \frac{\partial h}{\partial x}. \end{gathered} \tag{5}$$

Равенство (1) доказано.

Достаточность. Положим $A = \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial y},\ B = -\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$. Тогда имеют место соотношения (4) и

$$\begin{aligned} &f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right) = \left(A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y\right) + i\left(B \cdot \Delta x + A \cdot \Delta y\right) + \alpha_1 + i\alpha_2 = \\ &= \left(A + iB\right)\left(\Delta x + i\Delta y\right) + \alpha_1 + i\alpha_2 = C \cdot \Delta z + \alpha\left(\Delta z\right), \\ &\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,\ \alpha\left(\Delta z\right) = o\left(\Delta z\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Видим, что f дифференцируема в точке z_0, $f'\left(z_0\right) = C = \dfrac{\partial g}{\partial x} + i\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

Следствие. Если $g,\ h$ имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, то функция $f = g + ih$ дифференцируема в комплексном смысле.

2^0. Сопряженные гармонические функции.

Пусть $f = g + ih$ имеет в области G комплексную производную f'. Предположим, что функции $g,\ h$ дважды непрерывно дифференцируемы. (В дальнейшем мы установим, что это условие выполняется автоматически). Дифференцируя уравнения Коши-Римана, мы получаем равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y},\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}; \\ &\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x},\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

так что функция g имеет нулевой оператор Лапласа:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. является гармонической функцией. Гармонической является и функция h — мнимая часть функции f. Гармонические функции $g,\ h$ связаны условиями Коши-Римана, они называются сопряженными гармоническими функциями.

Если известна одна из функций $g,\ h$, то условия Коши-Римана дают частные производные (дифференциал) для другой функции, по которым функция восстанавливается с точностью до постоянной.

Если известна функция g, то функцию h ищем из условия $dh = -\dfrac{\partial g}{\partial y}dx + \dfrac{\partial g}{\partial x}dy$. Гармоничность g влечет замкнутость формы $-\dfrac{\partial g}{\partial y}dx + \dfrac{\partial g}{\partial x}dy$, т.е. локальное существование первообразной.

Пример $g(x,y)=2xy,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}=2y,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=2x$, для h получаем условие $dh=-2xdx+2ydy$, из которого находим $h(x,y)=-x^2+y^2+C$,

$f(z)=2xy+i\left(-x^2+y^2\right)+iC=-i\left(x+iy\right)^2+iC=-iz^2+iC$. Функция восстановлена с точностью до чисто мнимой постоянной.