Лекции 12–13   20 – 27.11.2024

Глава VI. Аналитическое продолжение

Пусть $M \subset \mathbb{C}$, f_0 — функция на M, f голоморфна в области G, $f|_{M\cap G} = f_0|_{M\cap G}$. Тогда f называется аналитическим продолжением для f_0. Например, мы построили аналитические продолжения для показательной и тригонометрических функций с вещественной прямой на комплексную плоскость. Эти продолжения реализуются с помощью степенных рядов. Теорема единственности обеспечивает единственность таких продолжений. Наоборот, функцию $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, голоморфную в единичном круге, продолжаем в область $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ формулой $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

§ 1. Аналитическое продолжение по цепочке областей

1^0. Определение

Пусть f — голоморфная функция в области G. Пару $F = (G,\ f)$ называют (аналитическим) элементом.

Если $G = U$ — круг, назовем элемент круговым. Центр z_0 круга U называют центром элемента F.

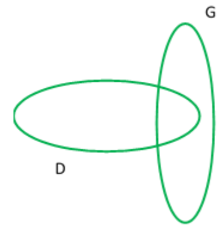
Функцию f можно представить (единственным образом) степенным рядом с центром разложения z_0.

Если U — круг сходимости этого степенного ряда, элемент называется **каноническим.**

Пример.

$$U = \{z \,|\, |z-1| < 1\},\ f(z) = \ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$ — канонический элемент.

2^0. Определение



$F = (D,\ f)$ — элемент. Элемент $(G,\ g)$ называется непосредственным аналитическим продолжением **НАП** элемента $(D,\ f)$, если $D \cap G \neq \varnothing$ и $f = g$ на $D \cap G$.

В силу теоремы единственности **НАП** элемента $F=(D,\ f)$ в область G определяется однозначно.

Отметим важное свойство канонических элементов:

Если (V,f) и $(\tilde{V},\tilde{f})$ — НАП одного и того же канонического элемента (U,f), при этом (V,f) и $(\tilde{V},\tilde{f})$ имеют общий центр, принадлежащий U, то $(V,f)=(\tilde{V},\tilde{f})$.

3^0. Замечания.

1) Может случиться, что продолжение невозможно. Например, элемент

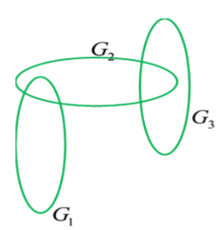
$$f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!},\ |z|<1$$

не допускает аналитического продолжения за пределы единичного круга, не имеет нетривиальных аналитических продолжений.

2) Если $f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|<R$ — канонический элемент, то на окружности $|z-z_0|=R$ найдется точка z^*, в окрестность которой функция не продолжается. Например, для $f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z|<1$ имеем $z^*=1$. Такую точку называют граничной особой точкой канонического элемента.

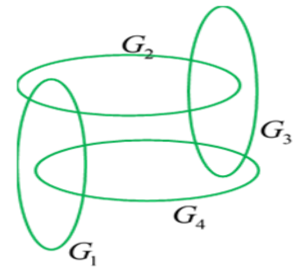
3) Если продолжение канонического элемента $f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|<R$ в окрестность граничной точки z^* возможно, его можно получить переразложением степенного ряда. Взяв z_1 на отрезке $[z_0,\ z^*]$, представим функцию степенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_1)^n,\ |z-z_1|<R_1$, где $d_n=\dfrac{1}{n!}f_0^{(n)}(z_1)$. Точка z^* лежит в круге сходимости, продолжение построено.

4^0. Определение. Аналитическое продолжение по цепочке



Если для элементов $(G_1,\ f_1),(G_2,\ f_2),\ldots,(G_m,\ f_m)$ при каждом $k=1,\ldots,\ m-1$ элемент $(G_{k+1},\ f_{k+1})$ является **НАП** элемента $(G_k,\ f_k)$, то элемент $(G_m,\ f_m)$ называется продолжением $(G_1,\ f_1)$ по цепочке областей.

Представляется естественным определить на $G=\bigcup_{k=1}^{m} G_k$ функцию f, полагая $f(z)=f_k(z)$ для $z\in G_k$. Однако может случиться, что точка z принадлежит одновременно разным областям и значения соответствующих функций различны. Мы с неизбежностью приходим к "многозначной функции".

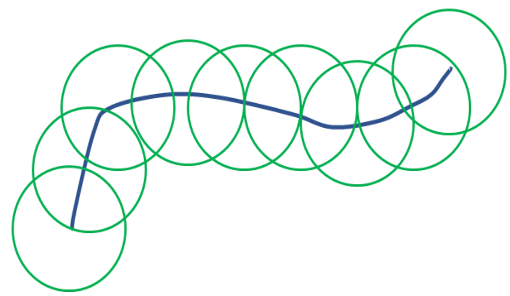


Процесс продолжения по цепочкам оказывается труднообозримым. Поэтому мы предпочтем альтернативный процесс аналитического продолжения по путям.

§ 2. Аналитическое продолжение вдоль пути

1^0. Определение. Аналитическое продолжение вдоль пути

Пусть $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ — гладкий путь на комплексной плоскости. Аналитическое продолжение вдоль пути — это семейство канонических элементов $\{F_t=(U_t,f_t)\}_{t\in[a,b]}$:



1) $\gamma(t)$ — центр элемента F_t;

2) каждая точка $t_0\in[a,b]$ имеет в $[a,b]$ такую окрестность u_{t_0}, что при $t\in u_{t_0}$ элемент F_t является **НАП** элемента F_{t_0}.

Говорят, что элемент F_b получен аналитическим продолжением элемента F_a вдоль пути γ.

Замечание о радиусе элементов. Может случиться, что некоторый элемент F_{t_0} (точнее, круг U_{t_0}) имеет бесконечный радиус. Тогда f_{t_0} — целая функция. В этой ситуации и все остальные f_t — целые функции, только они должны быть представлены степенными рядами с другими центрами разложения. Основной интерес представляет случай конечного радиуса. Радиус R_t элемента F_t оказывается непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$.

2^0. Предложение.

Аналитическое продолжение вдоль пути единственно.

Если $\{F_t\}_{t\in[a,b]}$ и $\{\tilde{F}_t\}_{t\in[a,b]}$ — два аналитических продолжения канонического элемента $F_a=\tilde{F}_a$ вдоль пути $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, то $F_b=\tilde{F}_b$ $\left(\forall t\in[a,b]\ F_t=\tilde{F}_t\right)$.

Доказательство

По определению аналитического продолжения вдоль пути найдется окрестность $[a,t_1)$ точки a, в пределах которой элементы $F_t, \tilde{F}_t$ — НАП $F_a = \tilde{F}_a$, так что $F_t = \tilde{F}_t$.

Введем множество

$$E = \left\{ t \in [a,b] \,|\, \forall \tau \in [a,t] \;\; F_\tau = \tilde{F}_\tau \right\}.$$

$E \neq \varnothing$, т.к. $E \supset [a,t_1)$.

Положим

$$t_0 = \sup E .$$

Тогда $t_0 \geq t_1$. Покажем, что $t_0 \in E$. В пересечении $u_{t_0} \cap \tilde{u}_{t_0}$ найдется точка $t_2 \in E$; элементы F_{t_0} и $\tilde{F}_{t_0}$ — НАП $F_{t_2} = \tilde{F}_{t_2}$ и имеют общий центр, поэтому они совпадают, $t_0 \in E$.

Допустив, что $t_0 < b$, мы увидим (как в начале доказательства), что $E \supset [t_0, t_3)$ для некоторого $t_3 \in (t_0, b]$ в противоречие с определением t_0.

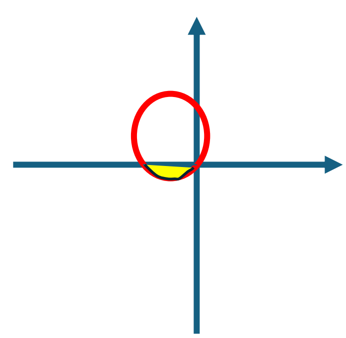
Итак, $\forall t \in [a,b]$ $F_t = \tilde{F}_t$, в частности, $F_b = \tilde{F}_b$.

3^0. Тривиальный пример

Пусть f — голоморфная функция в области G.

Возьмем $z_0 \in G$. Функция f порождает канонический элемент $\left(U_{z_0}, f_{z_0}\right)$, в котором функция f_{z_0} — это сумма ряда Тейлора функции f с центром разложения z_0, а U_{z_0} — круг сходимости этого ряда. В некоторой окрестности точки z_0 имеет место равенство $f = f_{z_0}$.

Замечание. Нельзя гарантировать выполнение равенства $f = f_{z_0}$ во всем пересечении $U_{z_0} \cap G$, что иллюстрируется следующим примером. Пусть G — комплексная плоскость с разрезом $(-\infty, 0]$ по отрицательной вещественной полуоси, f — главная ветвь логарифма в этой области, $z_0 = -1 + i$, U_{z_0} — круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром z_0. В пересечении этого круга с нижней полуплоскостью (на рисунке это желтая область) равенство нарушено.



Рассмотрим гладкий путь γ, проходящий в G. Функция f порождает в точках носителя пути γ канонические элементы $\{(U_t, f_t)\}_{t\in[a,b]}$. Семейство канонических элементов $\{(U_t, f_t)\}$ аналитически продолжает элемент (U_a, f_a) до элемента (U_b, f_b). Чтобы оправдать предыдущую фразу, мы должны для каждого $t_0 \in [a,b]$ предъявить окрестность u_{t_0}, в пределах которой элемент (U_t, f_t) — непосредственное продолжение (U_{t_0}, f_{t_0}).

Уменьшим радиусы кругов U_t так, чтобы новые круги $V_t \subset G$. Теперь $f = f_t$ в круге V_t. В качестве u_{t_0} можно взять такой интервал $u_{t_0} = (\alpha_{t_0}, \beta_{t_0})$, образ которого $\gamma(u_t) \subset V_{t_0}$. Действительно, для $t \in u_{t_0}$ открытое множество $D = V_t \cap V_{t_0} \neq \varnothing$ $(\gamma(t) \in D)$ и $f_t = f = f_{t_0}$ на D. По теореме единственности $f_t = f_{t_0}$ на $U_t \cap U_{t_0} \supset V_t \cap V_{t_0}$, f_{t_0} и f_t непосредственно аналитически продолжают друг друга.

В ходе продолжения элементов голоморфной в области G функции в пределах этой области мы получаем другие элементы этой же функции. Новых элементов не возникает.

3^0. Следствие. Принцип перманентности.

1) Пусть f голоморфна в области G, γ — гладкий путь в области G. F_a — элемент порожденный функцией f в начале пути. Тогда этот элемент можно продолжить вдоль γ, причем и конечный элемент F_b оказывается порожденным функцией f. (См. Тривиальный пример).

2) Пусть (U_t, f_t), $t \in [a, b]$ — аналитическое продолжение вдоль пути γ, F голоморфна в области $G = \bigcup_{t\in[a,b]} U_t$ φ —такая голоморфная функция, что для всех $t \in [a, b]$ имеет смысл композиция $\varphi \circ f_t$. Если $\varphi \circ f_a = F$, то $\varphi \circ f_b = F$.

3) Если элемент (U_a, f_a) продолжается вдоль γ до элемента (U_b, f_b), то и элемент производной (U_a, f_a') продолжим вдоль этого пути, причем до элемента (U_b, f_b').

Операции аналитического продолжения по цепочке и вдоль пути взаимозаменяемы. Если канонический элемент (V, g) получается аналитическим продолжением канонического элемента $F = (U, f)$ по цепочке, то этот элемент получается аналитическим продолжением вдоль пути. Верно и обратное.

§ 3. Понятие аналитической функции

Определение

Полная аналитическая функция $\mathbb{F}$ — это совокупность всевозможных канонических элементов, полученных из некоторого (U_0, f_0) начального канонического элемента всевозможными продолжениями вдоль путей.

Объединение областей всех элементов называется областью существования полной аналитической функции.

Полная аналитическая функция однозначно определяется любым своим элементом.

При описании аналитической функции следует не только перечислить элементы, но и указать пути связывающие эти элементы.

Значения голоморфных функций, входящих в состав элементов аналитической функции называют значениями этой функции. Аналитическая функция может иметь более одного элемента с общим центром. В этом смысле аналитическая функция может оказаться многозначной.

Определение

Пусть продолжение элемента $(U_0, \ f_0)$ с центром $z_0 \in G$ возможно вдоль любого пути в области G с началом z_0. Совокупность таких продолжений называется аналитической функцией в области G.

При рассмотрении конкретных функций удобно с каноническими элементами связывать и элементы с более широкими областями, являющиеся непосредственными продолжениями канонических. Эти элементы и входящие в них голоморфные функции называются голоморфными ветвями аналитической функции.

Вернемся к тривиальному примеру. Теперь мы можем сказать, что голоморфная в области G функция f порождает аналитическую в области G функцию (продолжение возможно вдоль любого пути, проходящего в G), состоящую из элементов самой функции f. Принято отождествлять голоморфную функцию f и порожденную ею аналитическую в области G функцию.

§ 4 Теорема о монодромии

1^0. Теорема 1 Об аналитическом продолжении вдоль гомотопных путей

Пусть γ_0 и γ_1 гомотопны в G как пути с фиксированными концами, $\{\gamma_s\}_{s\in[0,1]}$ — семейство путей гомотопии. Предположим, что элемент F_a с центром $\gamma_0(a)=\gamma_1(a)$ допускает продолжение вдоль всех путей семейства.

Тогда результат продолжения для всех этих путей один и тот же.

Теорему примем без доказательства.

Замечание. Существенно, что исходный элемент допускает продолжение по всем путям. Продолжения логарифма вдоль верхней и нижней полуокружностей дают разные результаты. Это объясняется тем, что среди путей, преобразующих одну полуокружность в другую, неизбежно найдется проходящий через 0. Вдоль такого пути продолжение невозможно.

2^0. Теорема 2 О монодромии.

Если продолжение элемента (U_0, f_0) возможно по любому пути в односвязной области G, то результат не зависит от пути. Продолжение приводит к голоморфной функции.

Говорят еще, что аналитическая функция в односвязной области однозначна.

Доказательство и уточнение формулировки

Поскольку в односвязной области любые два пути с общими началом и концом гомотопны, то мы корректно определим для каждого $z\in G$ канонический элемент (U_z, f_z) — результат продолжения элемента (U_0, f_0) вдоль произвольного пути, ведущего из центра U_0 в точку z.

Мы построили функцию, аналитическую в односвязной области. С этой функцией связывают голоморфную функцию

$$f:\ f(z)=f_z(z).$$

В силу единственности аналитического продолжения равенство имеет место не только в точке z, но и в некоторой окрестности V_z точки z:

$$f(\zeta)=f_z(\zeta),\zeta\in V_z.$$

Последнее равенство означает голоморфность функции f.

Принято отождествлять аналитическую в односвязной области функцию и связанную с ней голоморфную функцию f

§ 5. Логарифмическая функция

1⁰. В курсе вещественного анализа построена логарифмическая функция на луче $(0, +\infty)$, на интервале $(0,\, 2)$ логарифмическая функция представляется степенным рядом

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\ |x-1|<1\,.$$

Этот степенной ряд позволяет построить канонический элемент логарифма $(U_0,\ f_0)$ в круге единичного радиуса с центром в точке 1:

$$U_0=\{z\,|\,|z-1|<1\},\quad f_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n\,. \tag{*}$$

Теорема единственности говорит, что мы реализовали единственно возможный вариант продолжения вещественного логарифма на круг U_0.

Поскольку $e^{\ln x}=x,\ \ x\in(0,2)$, то в силу теоремы единственности справедливо равенство $e^{f_0(z)}=z,\ z\in U_0$, т.е. значения только что построенной функции являются логарифмами.

Ранее мы построили ветвь логарифма f в области G — комплексной плоскости с разрезом $(-\infty,\,0]$:

$$\text{для }\ z=re^{i\varphi},\ r>0,\ \varphi\in(-\pi,\pi)\quad f(z)=\ln r+i\varphi$$

На круге U_0 функции f и f_0 совпадают. Функция f голоморфна в области G,

$$\forall z\in G\quad f'(z)=\frac{1}{z}.$$

Для функции f имеет место представление интегралом по переменному пути:

$$f(z)=\int_{\gamma_z}\frac{d\zeta}{\zeta},\ \gamma_z \text{ соединяет } 1 \text{ и } z \text{ в области } G\,.$$

Ниже интеграл будет использован для построения аналитического продолжения вдоль пути.

2⁰. Определение.

Полная аналитическая функция Ln, порожденная элементом $(U_0,\ f_0)$ называется логарифмической функцией.

Для любого элемента (U, f), полученного аналитическим продолжением элемента (*), в силу принципа перманентности справедливы равенства

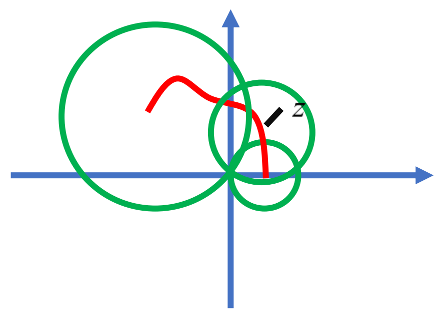
$$e^{f(z)} = z,\ f'(z) = \frac{1}{z}, \text{ для } z \in U.$$

Первое равенство выражает тот факт, что значения логарифмической функции являются логарифмами в обычном понимании этого слова.

Второе равенство позволяет строить продолжения элемента $(U_0,\ f_0)$ с помощью интеграла $\int \frac{dz}{z}$. Поскольку производная имеет особенность в нуле, то продолжение возможно только вдоль путей, не проходящих через нуль.

3⁰. Построение продолжения вдоль пути.

В качестве аналитического продолжения вдоль кусочно гладкого пути γ, не проходящего через 0, предлагается семейство элементов $F_t = (U_t,\ f_t)$ с центрами $z_t = \gamma(t)$ и радиусами $|\gamma(t)|$. Значение голоморфной функции f_t в центре z_t круга U_t определим равенством



$$f_t(z_t) = \int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где интегрирование ведется вдоль частичного пути $\gamma_t = \gamma|_{[a,t]}$. В точке $z \in U_t$ функция f_t принимает значение

$$f_t(z) = f_t(z_t) + \int_{\eta_z} \frac{d\zeta}{\zeta},\ \eta_z \text{ соединяет в } U_t \text{ точки } \gamma(t) \text{ и } z.$$

Последний интеграл не зависит от выбора пути η_z. В качестве η_z можно взять, например, прямолинейный путь.

Для конечного элемента $(U_b,\ f_b)$ справедлива формула

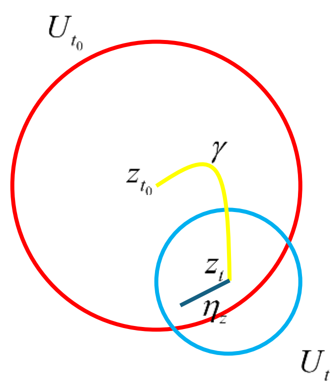
$$f_b(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\eta_z} \frac{d\zeta}{\zeta},\ z \in U_b,$$

где путь γ_z составлен из γ и пути η_z, соединяющего в U_b точки $\gamma(b)$ и z.

Покажем, что построенное семейство канонических элементов, действительно, является аналитическим продолжением вдоль γ. Для каждого $t_0 \in [a,b]$ нужно указать окрестность u_{t_0}, в пределах которой элементы (U_t, f_t) непосредственно продолжают (U_{t_0}, f_{t_0}). В качестве u_{t_0} возьмем окрестность точки t_0 на $[a,b]$, образ которой лежит в U_{t_0}, т.е. $\gamma(u_{t_0}) \subset U_{t_0}$.

Возьмем произвольную точку $t \in u_{t_0}$, для определенности $t > t_0$ и убедимся в том, что (U_t, f_t) непосредственно продолжает (U_{t_0}, f_{t_0}), что $f_t = f_{t_0}$ на $U_t \cap U_{t_0}$. Пусть $z \in U_t \cap U_{t_0}$, а путь η_ξ соединяет $\gamma(t)$ и z в $U_t \cap U_{t_0}$, тогда

$f_t(z) = \int\limits_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{\eta_\xi} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_{\gamma|_{[a,t_0]}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{\gamma|_{[t_0,t]}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{\eta_\xi} \frac{d\zeta}{\zeta} = f_{t_0}(z)$, поскольку путь, составленный из $\gamma|_{[t_0,t]}$ и η_z, соединяет z_{t_0} и z в U_{t_0}.



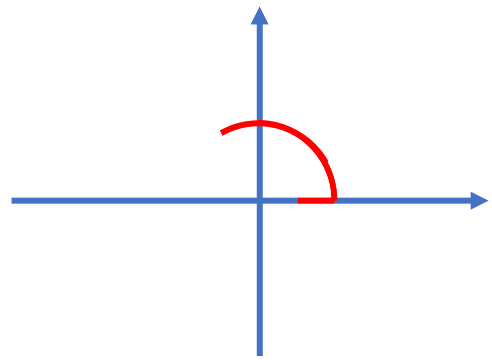
Полученное равенство означает, что (U_t, f_t) — непосредственное аналитическое продолжение (U_{t_0}, f_{t_0}), семейство $\{(U_t, f_t)\}_{t\in[a,b]}$ — аналитическое продолжение элемента (U_0, f_0).

Продолжение возможно вдоль любого пути, не проходящего через нуль. Область $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ — область существования логарифма.

Вполне уместно называть построенное аналитическое продолжение логарифмического элемента первообразной для $\frac{1}{z}$ вдоль пути

Для обозначения значений логарифмической функции используется символ $\ln z$. Следует отметить, что значение определяется не только точкой z, но и путем, по которому мы в точку z пришли. Если необходимо, можно пользоваться обозначением $(\ln z)_\gamma$.

4⁰. Пусть $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$. Путь из 1 в z_0 можно составить из прямолинейного отрезка $[1, r_0]$ и дуги окружности $z = r_0 e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$. Интегрирование дает



$$\ln z_0 = \ln r_0 + \varphi_0 i .$$

Добавив к нашему пути несколько оборотов по окружности $|z| = r_0$, мы прибавим к значению функции число $2\pi k i$:

$$\ln z_0 = \ln r_0 + \varphi_0 i + 2\pi k i .$$

В процессе аналитического продолжения мы получили всевозможные значения логарифма.

5⁰. Логарифмическая функция состоит из всевозможных канонических элементов (U, f).

Пусть (U, f) — один из таких элементов, а z_0 — его центр. Тогда U имеет радиус $|z_0|$. В силу принципа перманентности

$$e^{f(z)} = z,\; f'(z) = \frac{1}{z} \text{ (можно написать } (\ln z)' = \frac{1}{z}\text{).}$$

f может быть представлена степенным рядом

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \frac{(z - z_0)^n}{(z_0)^n}, \qquad (*)$$

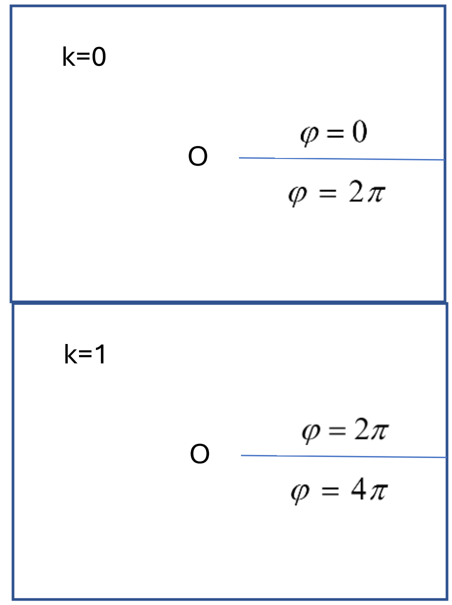
(ряд здесь получен интегрированием ряда, представляющего производную

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - z_0)^n}{z_0^{n+1}} \text{).}$$

$f(z_0) = \ln z_0 + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$, $\ln z_0$ — один из логарифмов числа z_0.

6^0. Риманова поверхность логарифмической функции

Главная ветвь f логарифма в комплексной плоскости с разрезом $[0, +\infty)$ определяется формулой

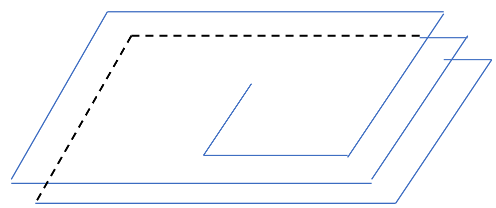


$$f(z) = \ln r + i\varphi \text{ для } z = re^{i\varphi},\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Другие ветви логарифма в этой области имеют вид

$$f_k = f + 2\pi k i,\ f_k(z) = \ln r + i\varphi,\ \varphi \in (2\pi k, 2\pi(k+1)).$$

Свяжем с каждой функцией f_k экземпляр G_k комплексной плоскости с разрезом $[0, +\infty)$ и попытаемся объединить эти функции. Заметим, что функция f_1 на верхнем берегу разреза принимает те же значения, что и функция f_0 на нижнем берегу в плоскости с $k = 0$. Эти берега можно склеить и получить двулистную поверхность над комплексной плоскостью. Продолжая процесс склеивания, получим бесконечнолистную поверхность над комплексной плоскостью. Эта поверхность называется римановой поверхностью логарифма. Логарифмическая функция может быть определена на своей римановой поверхности.



Логарифмическая функция становится обычной функцией, но каждому комплексному числу соответствует бесконечное число точек римановой поверхности и бесконечное число логарифмов.

§ 6 Квадратный корень

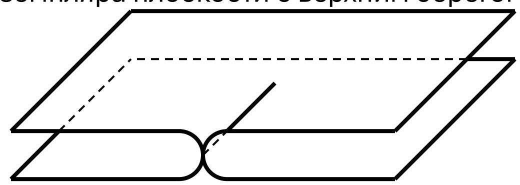
Начальный элемент и аналитические продолжения квадратного корня определяются формулой

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z}$$

Мы получаем полную аналитическую функцию — квадратный корень.

Область существования — $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Значениями построенной функции являются квадратные корни. Для каждой точки имеем два канонических элемента с взаимно противоположными значениями.

Для построения римановой поверхности достаточно двух экземпляров комплексной плоскости. Следует склеить нижний берег первого экземпляра плоскости с верхним берегом второго, а верхний берег первого с нижним берегом второго. Получится поверхность с самопересечением — риманова поверхность квадратного корня. Поверхность двулистная, каждому комплексному числу, отличному от нуля, соответствуют две точки на римановой поверхности.



Если в качестве области определения использовать риманову поверхность, квадратный корень становится обычной функцией.

Аналогичным образом строится корень n-й степени.