Лекция 10 – 11   06.11.2024 – 13.11.2024

Глава V. Теорема о вычетах и ее приложения

§ 1. Вычет голоморфной функции в изолированной особой точке

1⁰. Определение. Пусть $z_0 \neq \infty$ — изолированная особая точка функции f,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ — \tag{1}$$

лорановское разложение функции f в окрестности точки z_0.

Коэффициент c_{-1} называется вычетом функции f в точке z_0,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}.$$

2⁰. Теорема 1.

f голоморфна в проколотом круге радиуса R с центром z_0, $0 < \rho < R$, Γ_ρ — окружность радиуса ρ.

Тогда

$$\int_{\Gamma_\rho^+} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0). \tag{2}$$

Доказательство.

На Γ_ρ ряд (1) равномерно сходится, допускает почленное интегрирование.

$$\int_{\Gamma_\rho^+} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_\rho^+} c_{-1}(z - z_0)^{-1}\,dz = \left[z = z_0 + \rho e^{it} \right] = \int_0^{2\pi} c_{-1} \frac{\rho e^{it} i}{\rho e^{it}}\,dt = 2\pi i c_{-1},$$

остальные члены имеют нулевые интегралы, поскольку они имеют первообразные.

(Формула (2) знакома нам, как формула для коэффициента ряда Лорана).

3⁰. Определение.

Пусть . ∞ — изолированная особая точка функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,\ |z| > R. \tag{3}$$

Тогда $\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$ — вычет.

Теорема 2.

Для $|\rho| > R$ **имеем**

$$\int\limits_{\Gamma_\rho^-} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) \tag{4}$$

§ 2. Вычисление вычетов

Первый путь — построение ряда Лорана. Именно такой прием рекомендуется для существенно особых точек и бесконечности.

1⁰. $z_0 \neq \infty$ — устранимая особая точка.

Тогда

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = 0. \tag{1}$$

2⁰. $z_0 \neq \infty$ — простой полюс.

Тогда

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,f(z). \tag{2}$$

Действительно,

$$(z-z_0)\,f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1}(z-z_0)^n \underset{z\to z_0}{\to} c_{-1} = \operatorname{Res}(f,z_0).$$

Если $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$, $\varphi(z_0) \neq 0,\ \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{3}$$

Действительно, на этот раз

$$(z-z_0)\,f(z) = \varphi(z)\frac{z-z_0}{\psi(z)} = \varphi(z)\frac{1}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} \underset{z\to z_0}{\to} \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

3⁰. $z_0 \neq \infty$ полюс k -го порядка. Тогда

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k\, f(z)\right). \tag{4}$$

$$\left(z-z_0\right)^k f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^{n+k}=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n-k}\left(z-z_0\right)^n,$$

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\left(z-z_0\right)^k f(z)\right)=\sum_{n=k-1}^{\infty} c_{n-k} n(n-1)\cdots(n-k+2)\left(z-z_0\right)^{n-k+1} \underset{z \to z_0}{\rightarrow} c_{-1}(k-1)!$$

4⁰. z_0 — существенно особая точка.

Пример $f(z)=(z+2)e^{1/z}=(z+2)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)$, $\operatorname{Res}(f,0)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

5⁰. $z_0=\infty$.

Пример $f(z)=\frac{z+1}{z+2}=\left(1+\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}+\cdots\right)$,. $\operatorname{Res}(f,\infty)=-c_{-1}=-(-2+1)=1$.

∞ — устранимая особая точка, но $\operatorname{Res}(f,\infty)\neq 0$, c_{-1} — коэффициент правильной части ряда Лорана.

Если ∞ — нуль порядка $k \geq 2$ для функции f, то $\operatorname{Res}(f,\infty)=0$.

Если $f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{A}{z^k}$, то

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\begin{cases}-A, & k=1,\\ 0, & k\geq 2.\end{cases}$$

Пример

$$f(z)=\frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z+3},\ \operatorname{Res}(f,\infty)=-1;$$
$$f(z)=\frac{1}{z+2}\sin\frac{1}{z+3},\ \operatorname{Res}(f,\infty)=0.$$

§ 3. Теорема о вычетах

Теорема 1.

Пусть f — голоморфна в односвязной области G, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Контур Γ проходит в G, не проходит через особые точки и охватывает точки $z_1, z_2, \ldots, z_m,\ m \leq n$.

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_k) \qquad (1)$$

Доказательство.

Пусть Γ_k — "маленькие" окружности с центрами z_k, D — область, ограниченная снаружи контуром Γ и изнутри контурами Γ_k. По теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f,\ z_k),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Пусть f — голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f,\ \infty) = 0. \qquad (2)$$

Пример.

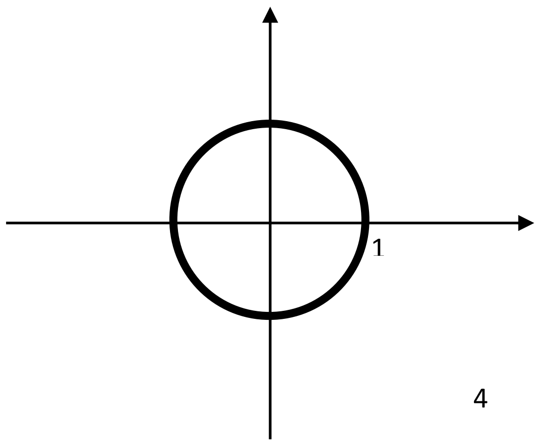
$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1},\ z_k = e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)i} \text{ — простые полюсы,}$$

$\operatorname{Res}(f, z_k) = \dfrac{z_k^2}{4z_k^3} = \dfrac{1}{4z_k}$, $\operatorname{Res}(f,\ \infty) = 0$. Видим, что сумма вычетов нулевая.

$$\int\limits_{|z-3|=3} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,\ z_0) + \operatorname{Res}(f,\ z_{-1})\right) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}\right) = \pi i \cos\frac{\pi}{\sqrt{4}} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

§ 4. Применение теоремы о вычетах для вычисления определенных интегралов

1⁰ . $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi$.



Положим $z = e^{i\varphi}$, $z \in \Gamma = \{z \mid |z| = 1\}$.

Тогда $\sin\varphi = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2i}$, $\cos\varphi = \dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}$, $d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$,

$$I=\int_{\Gamma^+} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}, \qquad (1)$$

где Γ — единичная окружность.

Последний интеграл вычислим с помощью теоремы о вычетах.

Пример.

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(4+\cos\varphi\right)^2}=\int_\Gamma\frac{1}{\left(4+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_\Gamma\frac{4z}{\left(z^2+8z+1\right)^2}dz\,.$$

Подынтегральная функция имеет полюсы второго порядка

$$z_1=-4+\sqrt{15},\ z_2=-4-\sqrt{15}\,,$$

при этом точка z_1 лежит внутри Γ, z_2 — вне Γ.

$$I=8\pi\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{\left(z^2+8z+1\right)^2},\,z_1\right)=8\pi\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2}\right)==8\pi\frac{-\left(z_1+z_2\right)}{\left(z_1-z_2\right)^3}=8\pi\frac{8}{\left(2\sqrt{15}\right)^3}=\frac{8\pi}{15\sqrt{15}}$$

2⁰. Вычисление несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx$.

Предположим, что f голоморфна в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1,\ldots,z_m$, f непрерывна в верхней замкнутой полуплоскости, не обращается в нуль на вещественной прямой,

$$z\,f\left(z\right)\underset{z\to\infty,\ \mathrm{Im}\,z\ge0}{\longrightarrow}0$$

т.е.

$$R\,M_R\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0\text{, где } M_R=\max_{z\in C_R}\left|f\left(z\right)\right|,\ C_R=\left\{z\,|\left|z\right|=R,\ \mathrm{Im}\,z\ge0\right\}$$

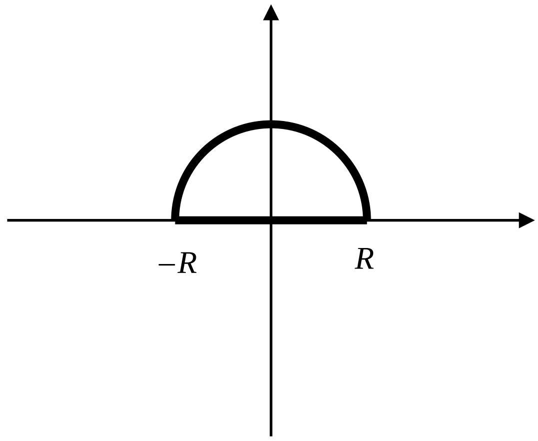
Тогда

$$\int_{C_R} f\left(z\right)dz\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \pi R\, M_R \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Рассмотрим контур Γ_R полукруга $|z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0$, состоящий из полуокружности C_R и отрезка $[-R,\ R]$ вещественной оси.



По теореме о вычетах

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f,\ z_k),$$

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f,\ z_k)$$

Предельный переход при $R \to +\infty$ дает

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f,\ z_k). \qquad (2)$$

Рассмотрим частный случай, где $f = \dfrac{P}{Q}$ — рациональная функция, $\forall x \in (-\infty,\ +\infty)\ Q(x) \ne 0$ и $\deg(Q) \ge \deg(P) + 2$.

Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — корни многочлена Q, лежащие в верхней полуплоскости, тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q},\ z_k\right). \qquad (3)$$

Примеры.

1) $I_n = \displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$.

Функция $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^n}$ имеет в верхней полуплоскости одну изолированную особую точку $z_0 = i$ — полюс n-го порядка.

$$\operatorname{Res}(f,\ i) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{(z+i)^n}\right) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-1} n(n+1)\cdots(2n-2)}{(2i)^{2n-1}} =$$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} i \left((n-1)!\right)^2} = \frac{(2n-3)!!}{2i(2n-2)!!},$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \pi\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},$$

$$I_n = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

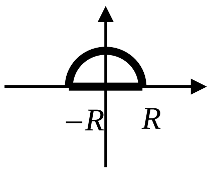
2) $I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx$.

$$f(z) = \frac{z^4}{z^6+1},\ z_k = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)i},\ \operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{z_k^4}{6z_k^5} = \frac{1}{6z_k},$$

Решение 1.

$$\int_{\Gamma_R}\frac{z^4}{z^6+1}dz = \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right) = \frac{\pi i}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}-i-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \frac{\pi i}{3}(-2i) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3},\ \int_0^{+\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx = \frac{\pi}{3}$$



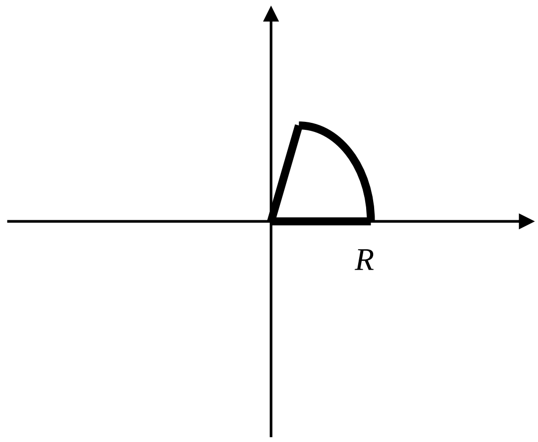
Решение 2.

$$\int_{\Gamma_R}\frac{z^4}{z^6+1}dz = \frac{2\pi i}{6}\frac{1}{z_1} = \frac{\pi i}{3}e^{-\frac{\pi i}{6}}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx - \int_0^{+\infty}\frac{x^4e^{\frac{4\pi i}{3}}}{x^6+1}e^{\frac{\pi i}{3}}dx = \frac{\pi i}{3}e^{-\frac{\pi i}{6}}$$

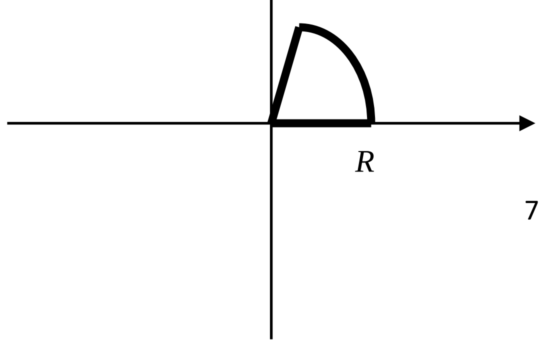
$$\left(1-e^{\frac{5\pi i}{3}}\right)I = \frac{\pi i}{3}e^{\frac{\pi i}{6}},\ \left(1-e^{-\frac{\pi i}{3}}\right)I = \frac{\pi i}{3}e^{-\frac{\pi i}{6}}\ |\ e^{\frac{\pi i}{6}}$$

$$\left(e^{\frac{\pi i}{6}}-e^{-\frac{\pi i}{6}}\right)I = \frac{\pi i}{3},\ 2i\sin\frac{\pi}{6}I = \frac{\pi i}{3},\ I = \frac{\pi}{3}$$



3) $I_n = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n},\ n\ge 2$.

Рассмотрим контур Γ_R кругового сектора $|z|<R,\ 0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$, состоящий из дуги C_R и отрезков. По теореме о вычетах



$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f,\, e^{\frac{\pi i}{n}} \right) = 2\pi i \frac{1}{n e^{\pi \frac{n-1}{n} i}} ,$$

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} - e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i \frac{1}{n e^{\pi \frac{n-1}{n} i}} ,$$

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right) \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i \frac{1}{n e^{\pi \frac{n-1}{n} i}} .$$

Предельным переходом получаем равенство

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = 2\pi i \frac{1}{n e^{\pi \frac{n-1}{n} i}} = -2\pi i e^{\frac{\pi}{n}} .$$

Делением на $\left(-2ie^{\frac{\pi}{n}} \right)$ получаем

$$\sin\frac{\pi}{n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \pi ,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}} .$$

3⁰. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx$.

Лемма Жордана.

Пусть функция f непрерывна на $\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \geq R_0$,

$$M_R = \max_{|z|=R,\ \operatorname{Im} z \geq 0} |f(z)| \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 ,$$

$\alpha > 0$.

Тогда

$$I_R = \int_{C_R : |z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z) e^{i\alpha z} dz \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Доказательство.

$$\left|I_R\right| \le M_R \int\limits_{C_R} \left|e^{i\alpha z}\right|\left|dz\right| = M_R \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin t} R dt = 2M_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin t} dt \le$$

$$\le 2M_R R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} t} dt \le 2M_R R \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi} t} dt = M_R \frac{\pi}{\alpha} \underset{R\to\infty}{\to} 0$$

Пусть $f = \dfrac{P}{Q}$ — рациональная функция, $\forall x \in (-\infty, +\infty)\ Q(x) \ne 0$ и $\deg(Q) > \deg(P)$,

$z_1, \ldots, z_m$ — корни многочлена Q, лежащие в верхней полуплоскости, тогда

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},\ z_k \right)$$

Предельным переходом с учетом леммы Жордана получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z},\ z_k \right). \qquad (4)$$

Примеры.

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2xi} dx}{x^2+4x+5} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2zi}}{z^2+4z+5}, -2+i \right) = 2\pi i \frac{e^{2(-2+i)i}}{2i} = \pi e^{2(-2+i)i} = \pi e^{-2}\left(\cos 4 - i \sin 4\right),$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^2+4x+5} = \pi e^{-2} \cos 4, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x^2+4x+5} = -\pi e^{-2} \sin 4.$$

§ 5. Несколько знаменитых интегралов

1⁰. Интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Лемма

f имеет простой полюс в нуле. C_r — верхняя полуокружность радиуса r с центром в 0.

Тогда $\displaystyle\int\limits_{C_r} f(z) dz \underset{r\to+0}{\to} \pi i \operatorname{Res}(f, 0)$.

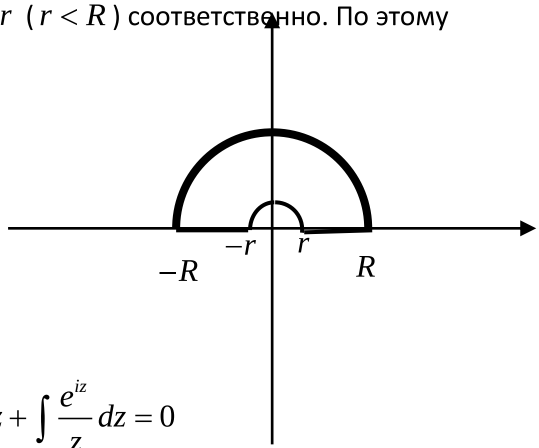
Доказательство. $f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + g(z)$. g — голоморфная функция. g ограничена в окрестности нуля $|z| < r_0$:

$$\exists M > 0 : |g(z)| \le M \ \ при \ |z| < r_0 .$$

$$\left| \int\limits_{C_r} g(z) dz \right| \le M\pi r \ \ при \ |z| < r_0 ; \ \left| \int\limits_{C_r} g(z) dz \right| \le M\pi r \underset{r \to +0}{\to} 0 .$$

$$\int\limits_{C_r} \frac{dz}{z} = \left[z = e^{it} \right] = \int\limits_0^{\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}} i dt = \pi i$$

Рассмотрим контур, состоящий, состоящий из отрезков $[-R, -r]$ и $[-r, -R]$ вещественной оси и двух верхних полуокружностей C_R и C_r радиусов R и r ($r < R$) соответственно. По этому контуру проинтегрируем функцию $\frac{e^{iz}}{z}$.



По интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma_{Rr}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Поскольку

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int\limits_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int\limits_r^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x} \right) dx = 2i \int\limits_r^R \frac{\sin x}{x} dx \underset{r \to +0, R \to +\infty}{\longrightarrow} 2i \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx ,$$

$$\int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \underset{R \to +\infty}{\to} 0 \text{ (по лемме Жордана)},$$

$$\int\limits_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \underset{r \to +0}{\to} -\pi i \text{ (по лемме)},$$

то предельный переход дает равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

2⁰. Интегралы Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Рассмотрим контур Γ_R, ограничивающий круговой сектор радиуса R с центральным углом $\pi/4$. По интегральной теореме Коши

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

$$\int_0^R e^{-x^2} dx - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ix^2} dx + \int_{C_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

Первое слагаемое имеет пределом (при $R \to +\infty$) интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

а интеграл по дуге окружности C_R бесконечно мал. Поэтому

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^{+\infty} \left(\cos x^2 - i \sin x^2\right) dx = 0,$$

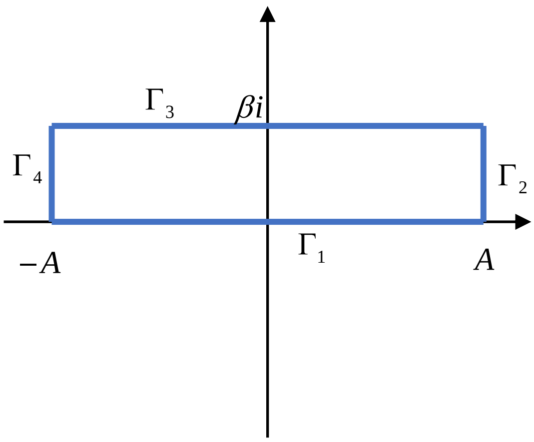
$$\int_0^{+\infty} \left(\cos x^2 - i \sin x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}, \qquad .$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

3⁰. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x \; dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$ **.**

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz$$



по контуру Γ прямоугольника с вершинами $\pm A, \pm A + \beta i$. Контур составлен из четырех отрезков $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

По интегральной теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0.$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int\limits_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int\limits_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz + \int\limits_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz = 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz = \int\limits_{-A}^{A} e^{-x^2} dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$$

$$\left| \int\limits_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int\limits_{0}^{\beta} e^{-(A+iy)^2} i dy \right| = \left| \int\limits_{0}^{\beta} e^{-A^2 - 2Ayi + y^2} i dy \right| \le e^{-A^2+\beta^2} \beta \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \ \int\limits_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz = -\int\limits_{-A}^{A} e^{-(x+\beta i)^2} dx = -\int\limits_{-A}^{A} e^{-x^2 - 2\beta xi + \beta^2} dx = -e^{\beta^2} \int\limits_{-A}^{A} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx \ .$$

Предельный переход дает равенство

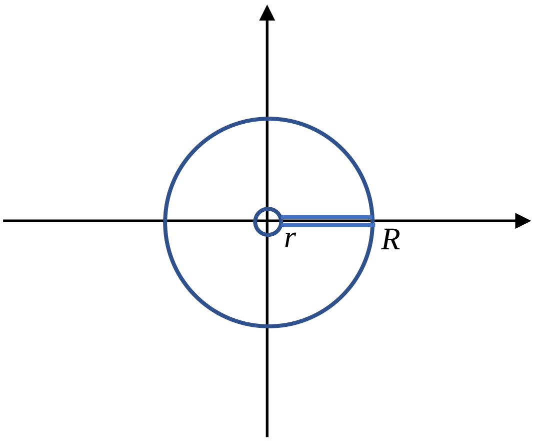
$$e^{\beta^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx = \sqrt{\pi},$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\beta^2}$$

4⁰.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \ \ \alpha \in (0, 1).$$

Рассмотрим интеграл



$$\int\limits_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz$$

по контуру Γ, состоящему из окружности C_R радиуса $R > 1$, пробегаемой в положительном направлении, окружности C_r радиуса $r < 1$, пробегаемой в отрицательном направлении, верхнего берега разреза, пробегаемого слева направо, и нижнего берега Γ_2, пробегаемого справа налево.

Подынтегральная функция определяется формулой

$$z = \rho e^{i\varphi}, \varphi \in (0, 2\pi), \qquad z^{\alpha-1} = \rho^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi}.$$

По теореме о вычетах

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}, -1\right) = 2\pi i e^{(\alpha-1)\pi i}$$

Далее,

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| \le 2\pi R \frac{R^{\alpha-1}}{R-1} = \frac{\pi R^{\alpha}}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\to} 0;$$

$$\left| \int_{C_r} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| \le 2\pi r \frac{r^{\alpha-1}}{1-r} = \frac{\pi r^{\alpha}}{1-r} \underset{r\to+0}{\to} 0$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = \int_r^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = -\int_r^R \frac{x^{\alpha-1} e^{2\pi(\alpha-1)i}}{1+x} dx$$

Предельный переход дает равенство

$$\left(1 - e^{2\pi(\alpha-1)i}\right) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{(\alpha-1)\pi i},$$

$$\left(1 - e^{2\pi\alpha i}\right) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = -2\pi i e^{\pi\alpha i},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{\pi\alpha i}}{e^{2\pi\alpha i} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi\alpha i} - e^{-\pi\alpha i}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$