Лекция 1, 04.09.2024

Теория функций комплексного переменного

Литература

А.П.Аксенов Теория функций комплексной переменной

Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин Лекции по теории функций комплексного переменного

Введение

§ 1. Множество комплексных чисел

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это $\mathbb{R}^2$ с дополнительной операцией умножения. Всякое комплексное число $z \in \mathbb{C}$ единственным образом записывается в алгебраической форме

$$z = x + iy,\ x,\ y \in \mathbb{R},$$

i — мнимая единица, $i^2 = -1$, $x = \operatorname{Re} z$ — вещественная, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая части z.

Действия над комплексными числами выполняются по обычным правилам алгебры с учетом соотношения $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является полем.

Для $z = x + iy$ число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным.

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображают точкой плоскости с координатами $x,\ y$ или радиус-вектором этой точки. Плоскость, изображающая множество $\mathbb{C}$, называется комплексной плоскостью.

Число $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ называется модулем комплексного числа z.

Важнейшие свойства модуля представлены следующими формулами:

$$|z| \geq 0,\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|,\ |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Для $z \neq 0$ можно найти вещественное число φ — аргумент комплексного числа z:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

и записать число z в тригонометрической или показательной форме:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}.$$

Модуль r и аргумент φ комплексного числа z — полярные координаты на комплексной плоскости.

В тригонометрической форме удобно умножать и делить комплексные числа:

$$\left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = \left(r_1 r_2\right) e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Комплексное число $z = re^{i\varphi} \neq 0$ имеет n различных корней n-й степени:

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

§ 2. Сходимость в $\mathbb{C}$

1^0. **Расстояние** в $\mathbb{C}$ определяется формулой

$$\rho\left(z_1,\ z_2\right) = \left|z_2 - z_1\right|$$

2^0. **Определение предела**. Пусть $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — комплексная последовательность.

Число z_0 называют пределом последовательности $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и пишут

$$z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0,\ z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall n > N\ \left|z_n - z_0\right| < \varepsilon,$$

т.е. если

$$\left|z_n - z_0\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

3^0. **Теорема о смысле сходимости в** $\mathbb{C}$**.**

Пусть $z_n = x_n + iy_n,\ z_0 = x_0 + iy_0$.

Тогда $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0 \Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0,\ y_n \underset{n\to\infty}{\to} y_0$.

4^0. **Предел** комплексной последовательности обладает естественными свойствами:

1) предел единствен;

2) сходящаяся последовательность ограничена;

3) подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу основной последовательности;

4) принцип выбора Больцано-Вейерштрасса;

5)критерий Коши;

6) арифметические операции над сходящимися последовательностями дают сходящиеся последовательности с соответствующими пределами.

5^0. **Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана.**

Расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ получается добавлением к $\mathbb{C}$ новой точки ∞. Будем говорить, что $z_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, если $\forall \mathrm{E} > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |z_n| > \mathrm{E}$.

Геометрически $\overline{\mathbb{C}}$ изображают сферой Римана. Рассмотрим сферу $S : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

через $N(0,\ 0,\ 1)$ обозначим ее северный полюс. Отождествим комплексную плоскость с координатной плоскостью Oxy в $\mathbb{R}^3$. Комплексному числу $z = x + iy$ поставим в соответствие точку $M \in S$ — пересечение прямой Nz со сферой. Построенное отображение (стереографическая проекция) определяет взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{C}$ и сферой, лишенной северного полюса. Северный полюс объявляем изображением бесконечности. Стереографическая проекция является гомеоморфизмом сферы Римана на расширенную комплексную плоскость.

§ 3 Ряды комплексных чисел

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ с комплексными членами называется сходящимся, если его последовательность частичных сумм $S_n = z_1 + \cdots + z_n$ сходится, предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ этой последовательности называется суммой ряда. Принято писать $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Теорема 1. $z_n = x_n + iy_n$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad \text{сходятся,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

Теорема 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| \text{ сходится } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ сходится,}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|.$$

Определение

Если $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется абсолютно сходящимся.

Перестановка абсолютно сходящегося ряда является абсолютно сходящимся рядом с той же суммой.

§ 4 Комплексные функции вещественного переменного

1^0. $\gamma : \Delta \to \mathbb{C}$ — комплексная функция вещественного переменного.

Вещественная и мнимая части функции γ определяются соотношениями

$$\varphi = \operatorname{Re}\gamma : \varphi(t) = \operatorname{Re}\gamma(t),$$

$$\psi = \operatorname{Im}\gamma : \psi(t) = \operatorname{Im}\gamma(t).$$

Теперь получается, что $\gamma = \varphi + i\psi$.

2^0. Предел, непрерывность, производная, интеграл определяются так же, как в вещественном случае.

Справедливы утверждения:

1) $\gamma(t) \underset{t\to t_0}{\to} C = A + iB \Leftrightarrow \varphi(t) \underset{t\to t_0}{\to} A,\ \psi(t) \underset{t\to t_0}{\to} B$;

2) γ непрерывна в точке t_0 $\Leftrightarrow$ φ, ψ непрерывны в точке t_0;

3) γ дифференцируема в точке t_0 $\Leftrightarrow$ φ, ψ дифференцируемы в точке t_0,

$\gamma'(t_0) = \varphi'(t_0) + i\psi'(t_0)$;

4) $\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + i\int_a^b \psi(t)\,dt$

Пример. $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$, $\gamma'(t) = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t) = ie^{it}$.

Предложение 1.

$$\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\gamma(t)|\,dt .$$

Доказательство. Если $I = \int_a^b \gamma(t)\,dt = 0$, неравенство очевидно. Если $I \ne 0$, то $I = re^{i\alpha}$,

$$|I| = r = Ie^{-i\alpha} = \int_a^b \gamma(t)e^{-i\alpha}dt = \int_a^b \operatorname{Re}\left(\gamma(t)e^{-i\alpha}\right)dt \le \int_a^b \left|\gamma(t)e^{-i\alpha}\right|dt = \int_a^b |\gamma(t)|\,dt .$$

Предложение 2.

γ непрерывна, F — первообразная.

Тогда $\int_a^b \gamma(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b$.

§ 5. Кривые и области на комплексной плоскости.

1^0. **Путь на комплексной плоскости.**

Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется путем на комплексной плоскости.

Запись $z = \gamma(t),\ t \in [a, b]$ называется параметрическим уравнением пути.

Например, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ — параметрическое уравнение единичной окружности.

Путь называется гладким, если γ непрерывно дифференцируема и $\forall t\ \gamma'(t) \ne 0$. $\gamma'(t)$ — касательный вектор пути, $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ — длина пути.

Класс эквивалентных гладких путей называется гладкой кривой.

2^0. **Области на комплексной плоскости.**

Область — непустое, открытое, линейно связное множество. Как правило, будут рассматриваться области с кусочно гладкой границей, например, круг, внешность круга, проколотый круг, кольцо, полуплоскость, полоса, прямоугольник.

Теорема Жордана. Простая замкнутая кривая γ разбивает плоскость на две области, одна из которых ограничена. Последняя область называется внутренностью кривой γ.

Область называется односвязной, если в ней любой замкнутый путь гомотопен постоянному.

Примеры. Круг, полуплоскость — односвязные области, кольцо — неодносвязная область. Проколотый круг неодносвязен в $\mathbb{C}$, но односвязен в $\overline{\mathbb{C}}$.