Лекция 15   11.12.2024

Глава VI. Несколько важных теорем

§ 1. Принцип аргумента

1^0. Логарифмическая производная

Определение.

Пусть f голоморфна в G, за исключением полюсов, и отлична от постоянной, $\varphi = \dfrac{f'}{f}$ называется логарифмической производной функции f.

Логарифмическая производная определена в области, полученной удалением из G нулей и полюсов функции f.

Название объясняется тем, что при наличии ветви g логарифма функции f ($e^g = f$) имеет место равенство

$$\varphi = \frac{f'}{f} = g'.$$

2^0. Логарифмический вычет

Определение.

Вычет логарифмической производной называется логарифмическим вычетом.

Предложение.

1) Если z_0 — нуль порядка k для функции f, то z_0 — простой полюс для логарифмической производной φ и

$$\operatorname{Res}(\varphi, z_0) = k$$

2) Если z_0 — полюс порядка k для функции f, то z_0 — простой полюс для логарифмической производной φ и

$$\operatorname{Res}(\varphi, z_0) = -k$$

Доказательство.

Функция f может быть представлена в виде

$$f(z) = (z - z_0)^l g(z),$$

где функция g голоморфна и $g(z_0) \neq 0$.

Так что

$$f'(z) = l(z - z_0)^{l-1} g(z) + (z - z_0)^l g'(z),$$
$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{l}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

z_0 — простой полюс функции φ, вычет равен l.

Рассуждение применимо как к нулю, так и к полюсу. Для нуля $l = k > 0$, для полюса $l = -k < 0$.

3⁰. Теорема 1. Принцип аргумента.

f голоморфна в односвязной области, за исключением конечного числа полюсов. Γ — простой замкнутый контур в G, не проходящий через нули и полюсы.

Внутри контура расположены нули $u_1, \ldots, u_p$ порядков $k_1, \ldots, k_p$ и полюсы $v_1, \ldots, v_q$ порядков $m_1, \ldots, m_q$; $P = k_1 + \cdots + k_p$, $Q = m_1 + \cdots + m_q$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = P - Q.$$

Доказательство сводится к применению теоремы о вычетах.

Теорема называется принципом аргумента, поскольку интеграл дает приращение логарифма функции f вдоль контура Γ, после деления на i получаем приращение аргумента, интеграл с коэффициентом $\frac{1}{2\pi i}$ — число оборотов точки $w = f(z)$ вокруг 0 при обходе контура Γ точкой z.

4⁰. Теорема 2. Теорема Руше.

Пусть f, g голоморфны в односвязной области G, Γ — простой замкнутый контур в области G,

$$\forall z \in \Gamma \ |f(z)| > |g(z)|.$$

Тогда функции f и $h = f + g$ имеют во внутренности Γ одинаковое число нулей (с учетом кратностей).

Доказательство.

Заметим, что

$$\forall z \in \Gamma \ f(z) \neq 0, \ f(z) + g(z) \neq 0.$$

Далее, $h = f\left(1+\frac{g}{f}\right) = f\psi$,

$$\forall z \in \Gamma \text{ точка } w = \psi(z) \text{ лежит в круге } |w-1| < 1,$$

в котором существует ветвь логарифма, так что

$$\int_{\Gamma} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz = 0 .$$

Наконец,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

и по теореме 1 функции f и h имеют одинаковое число нулей.

Примеры.

1) Основная теорема алгебры.

$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. При достаточно большом R на окружности C_R выполняется неравенство $|f| > |g|$. По теореме Руше функции f и $P = f + g$ имеют одинаковое число нулей. Функция f имеет n нулей. Многочлен P имеет с учетом кратностей n нулей.

2) Уравнение $z^{15} + 3z^2 + 1 = 0$ имеет в единичном круге два корня.

§ 2. Обращение голоморфной функции

1⁰. Теорема 1.

Пусть f голоморфна в окрестности U_0 точки z_0,

$$f'(z_0) \neq 0 .$$

Тогда существуют окрестности U точки z_0 и V точки $w_0 = f(z_0)$, такие что

$$f : U \to V \text{ — биекция.}$$

Обратное отображение f^{-1} является голоморфной функцией,

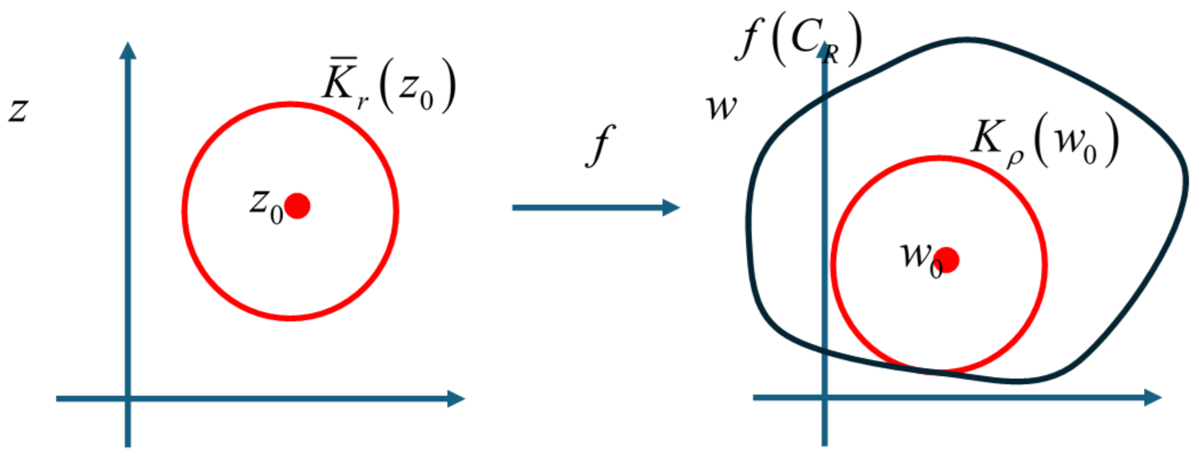
$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w)\right)} \qquad (1)$$

Доказательство.

В условиях теоремы z_0 — простой нуль функции $f(z)-w_0$, z_0 — изолированный нуль.

Подберем замкнутый круг $\bar{K}_r(z_0)\subset G$, на котором функция f принимает значение w_0 только в точке z_0, а производная нигде не обращается в нуль.

Положим $\rho=\min\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)-w_0|>0$ и покажем, что $f(K_r(z_0))\supset K_\rho(w_0)$.



Зафиксируем $w\in K_\rho(w_0)$ и напишем равенство

$$f(z)-w=(f(z)-w_0)+(w_0-w).$$

Поскольку $|f(z)-w_0|\geq\rho>|w-w_0|$ на окружности $|z-z_0|=r$, то в силу теоремы Руше $f(z)-w$ обращается в нуль на $K_r(z_0)$ столько же раз, сколько и $f(z)-w_0$, т.е. один раз.

Выберем $r_1<r$ так, чтобы $f(K_{r_1}(z_0))\subset K_\rho(w_0)$. Теперь f реализует биекцию $U=K_{r_1}(z_0)\to V=f(K_{r_1}(z_0))$. Обратное отображение $g=f^{-1}$ по теореме о производной обратной функции имеет производную

$$g'(w)=\frac{1}{f'(g(w))}$$

2^0. Рассмотрим теперь случай, где $f'(z_0)=0$.

Теорема 2.

Пусть

$$f(z) = w_0 + c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \cdots,\ c_k \neq 0$$

Тогда существуют такие $r > 0,\ \rho > 0$, что при любом $w \in K_\rho(w_0),\ w \neq w_0$ уравнение

$$f(z) = w$$

имеет ровно k различных корней в круге $|z - z_0| < r$.

Доказательство.

Повторим рассуждение из теоремы 1. При выборе r потребуем дополнительно, чтобы f' на $\bar{K}_r(z_0)$ обращалась в нуль только в точке z_0 .

Можно опять утверждать, что $f(z) - w$ обращается в нуль на $K_r(z_0)$ столько же раз, сколько и $f(z) - w_0$, т.е. k раз (с учетом кратности). Поскольку f' не обращается в нуль, то при $w \neq w_0$ функция $f(z) - w$ может иметь только простые нули, f принимает значение w в k различных точках.

§ 3. Принцип сохранения области

Теорема 1.

Пусть f — отличная от постоянной голоморфная функция в области G .

Тогда $f(G)$ — область.

Доказательство.

Пусть $w_1,\ w_2 \in f(G)$. Подберем $z_1,\ z_2 \in G$ так, чтобы $f(z_1) = w_1,\ f(z_2) = w_2$.

Если путь γ связывает точки $z_1,\ z_2$ в области G , то $f \circ \gamma$ связывает $w_1 = f(z_1),\ w_2 = f(z_2)$ в множестве $f(G)$. $f(G)$ — линейно связное множество.

Пусть $w_0 \in f(G)$, т.е. $w_0 = f(z_0)$ для некоторого $z_0 \in G$.

Мы показали, что существуют такие $r > 0$ и $\rho > 0$, что при условии $|w - w_0| < \rho$ уравнение

$$f(z) = w$$

имеет одно (если $f'(z_0) \neq 0$) или несколько (если $f'(z_0) = 0$) решений в круге $|z - z_0| < r$. В любом случае круг $K_\rho(w_0)$ — часть $f(G)$, w_0 — внутренняя точка $f(G)$.

$f(G)$ — открытое множество, $f(G)$ — область.

§ 4. Принцип максимума модуля

Теорема 1.

Пусть f — отличная от постоянной голоморфная функция в области G.

Тогда $|f|$ не имеет в G максимумов.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку $z \in G$ и окрестность $U \subset G$ этой точки. По принципу сохранения области точка $w = f(z)$ — внутренняя точка для $f(U)$, в множестве $f(U)$ есть точки, находящиеся от 0 на расстоянии, большем $|w|$, $|f|$ не имеет максимума в точке z.

Следствие 1.

G — ограниченная область. f голоморфна в G, непрерывна на $\overline{G}$.

Тогда

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Следствие 2.

f голоморфна в области G и не обращается в нуль ни в одной точке.

Тогда $|f|$ не имеет в G минимумов.

Следствие 3.

f, g голоморфны в ограниченной области G непрерывны на $\overline{G}$.

Если $f = g$ на ∂G, то $f = g$