§ 7 Точки ветвления аналитических функций.

1^0. Определение.

Пусть элемент $F_1 = (U_1, f_1)$ порождает аналитическую функцию в проколотой окрестности $\dot{V}$ точки z_0. Продолжим этот элемент вдоль окружности с центром z_0 (совершим обход точки z_0). Может случиться, что мы получим тот же элемент F_1. Тогда аналитической функции отвечает голоморфная функция. Если в результате обхода получается элемент $F_2 \neq F_1$, точка z_0 называется точкой ветвления аналитической функции.

Повторяя операцию продолжения, мы получим элементы $F_1,\ F_2,\ F_3, \ldots$. Если все эти элементы различны, z_0 — логарифмическая точка ветвления. Мы получаем счетный набор элементов

$$\ldots, F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \ldots.$$

В противном случае мы имеем точку ветвления конечного порядка. Число различных элементов называется порядком точки ветвления.

Примеры. 1) Логарифмическая функция имеет в нуле логарифмическую точку ветвления. Обход нуля прибавляет к логарифму слагаемое $2\pi i$.

2) Квадратный корень $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln z}$, имеет в нуле точку ветвления второго порядка. Обход нуля меняет значение квадратного корня на противоположное.

Двукратный обход нуля прибавляет к $\dfrac{1}{2}\ln z$ число $2\pi i$, что не влияет на значение экспоненты.

3) Корень n-й степени имеет в нуле точку ветвления n-го порядка.

Замечание. Если функция аналитична в $G \supset \dot{V}$, то ее элементы в точках проколотой окрестности могут оказаться не связанными друг с другом путями в $\dot{V}$. Говорят, что функция распадается на ветви.

§ 8 Арктангенс

1^0 Имеет место равенство

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

т.е.

$$\operatorname{tg} w = z \iff e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Действительно,

$$\operatorname{tg} w = z \iff \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)} = z \iff \frac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1} = iz \iff e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Определим главную ветвь арктангенса в комплексной плоскости с разрезами $(-\infty i, -i]$ и $[i, +\infty i)$ формулой

$$f_0(z) = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\left(\ln(1+iz) - \ln(1-iz)\right)$$

Другие ветви арктангенса даются формулой

$$f_k(z) = \operatorname{arctg} z + \pi k$$

2⁰

Для вещественных x

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

и

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| < 1.$$

Исходный элемент определим рядом

$$g_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \quad |z| < 1.$$

По теореме единственности функция совпадает с построенной выше главной ветвью арктангенса:

$$g_0(z) = \operatorname{arctg} z = f_0(z), \quad |z| < 1.$$

3⁰ Аналитическое продолжение дается интегралом

$$\operatorname{arctg} z = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

где путь γ_z соединяет 0 с точкой z и не проходит через $\pm i$.

Положительный обход точки i проведем по окружности $|z-i|=1$. По теореме о вычетах

$$\int_{|\zeta-i|=1} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+\zeta^2}, i\right) = 2\pi i \left.\frac{1}{\zeta+i}\right|_{\zeta=i} = \pi .$$

Аналитическое продолжение элемента вдоль окружности $|z-i|=1$ прибавляет к этому элементу число π, ветвь f_k переводится в f_{k+1}.

Положительный обход точки $(-i)$ переводит k-ую ветвь в $(k-1)$-й.

Точки $\pm i$ — логарифмические точки ветвления.

Рассмотренные канонические элементы арктангенса допускают продолжение до голоморфных функций в комплексной плоскости с разрезами по лучам $(-\infty i, -i]$ и $[i, +\infty i)$.

Во внешности единичного круга арктангенс распадается на счетное число голоморфных функций:

$$h_k(z) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{z} + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi k + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1) z^{2n-1}} .$$

Каждая из этих функций имеет устранимую особенность в ∞.

§ 9 Функция $1/\sqrt{1-z^2}$.

Символ $1/\sqrt{1-z^2}$ означает, что мы хотим построить аналитическую функцию, значениями которой будут квадратные корни из $1/(1-z^2)$. В вещественном анализе функция $1/\sqrt{1-x^2}$ рассматривается на интервале $(-1,1)$. Эта функция разлагается в ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \ |x|<1.$$

Введем в рассмотрение канонический элемент

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n}, \ |z|<1.$$

По теореме единственности $\forall z \left(f_0(z)\right)^2 = \dfrac{1}{1-z^2}$. Можно записывать этот канонический элемент и в форме

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^{2n},\ |z|<1$$

Полная аналитическая функция, порожденная элементом f_0, называется функцией $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

Элемент f_0 допускает и иное описание. В комплексной плоскости с разрезом $(-\infty, 0]$ была определена главная ветвь квадратного корня:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \text{ для } z = re^{i\varphi}, r>0,\ \varphi \in (-\pi, \pi)$$

Пользуясь этой ветвью определим функцию $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом $(-\infty,-1]$ и функцию $\dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом $[1,+\infty)$. Общей частью этих плоскостей с разрезами является область G — $\mathbb{C}$ с разрезами $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$. В области G определим функцию

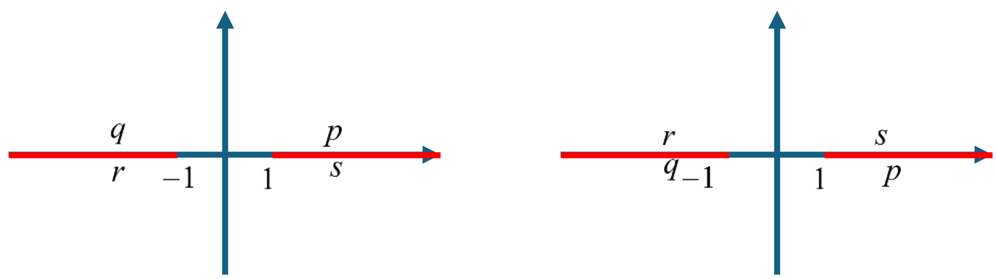
$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}}.$$

На интервале $(-1,1)$ функция g равна f_0. По теореме единственности функции равны во всем единичном круге. Функция g продолжает функцию f_0 с единичного круга на область G

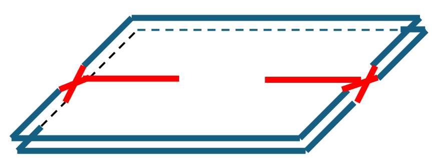
Теперь можно описать строение аналитической функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$. Если путь γ с началом в нуле не покидает область G то элементы аналитического продолжения вдоль γ порождаются голоморфной функцией g. Обход точки $z_1 = 1$ (продолжение элемента f_0 вдоль окружности $|z-1| = 1$) переводит ветвь $\dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$ в $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-z}}\right)$ и сохраняет $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}$. Элемент f_0 превращается $(-f_0)$. То же самое происходит при обходе точки (-1). Если путь γ обходит обе точки $(+1)$ и (-1), то элемент f_0 преобразуется сам в себя. Таким образом над каждой точкой области $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$ располагаются два элемента аналитической функции

$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, эти элементы взаимно противоположны. Для каждого $z \in \mathbb{C}$ значениями функции оказываются оба квадратных корня из $\frac{1}{1-z^2}$.

Риманова поверхность получается склеиванием двух экземпляров области G. На одном экземпляре мы определили функцию $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, на другом определим функцию $\left(-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)$. Проведем склеивание берегов разрезов, на которых функции принимают одинаковые значения. Эти берега на рисунках отмечены одинаковыми символами.



Склеивание дает риманову поверхность.



Функция $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ аналитична в комплексной плоскости с удаленными точками 1 и (-1). Удаленные точки являются точками ветвления 2-го порядка.

В окрестности ∞ функция распадается на две голоморфные ветви

$$\pm\frac{i}{z} f_0\left(\frac{1}{z}\right) = \pm i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{z^{2n+1}}$$

§ 10 Арксинус

1^0. Элементарное построение ветвей арксинуса

Имеет место равенство

$$\operatorname{Arcsin} z=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}(-i)\left(-z+i\sqrt{1-z^2}\right)=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(-z+i\sqrt{1-z^2}\right)-\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

(1) можно записать в виде равносильности

$$w=\operatorname{Arcsin} z \iff iw=\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

Равенство следует интерпретировать как утверждение о том, что

$$\sin w=z \iff e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}\ . \tag{3}$$

Во всех формулах допускаются оба значения квадратного корня.

Доказательство.

$$\sin w=z \iff \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=z \iff e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0 \iff e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}\ .$$

Полученная формула позволяет построить главную ветвь арксинуса в области G — комплексной плоскости с разрезами $(-\infty,-1]$ и $[1,+\infty)$. Действительно, если $z\in G$, то $1-z^2$ попадет в область определения главной ветви квадратного корня — комплексной плоскости с разрезом $(-\infty,0]$, при этом $\left(-z+i\sqrt{1-z^2}\right)$ окажется в комплексной плоскости с разрезом $(-\infty,0]$. (Допустив, что $\left(-z+i\sqrt{1-z^2}\right)$ попадет на отрицательную вещественную полуось, мы можем написать

$$-z+i\sqrt{1-z^2}=w<0,\ i\sqrt{1-z^2}=w+z,\ z^2-1=w^2+2zw+z^2,$$
$$-1=w^2+2zw,\ z=-\frac{w^2+1}{2w}=-\frac{w+w^{-1}}{2}.$$

Последнее равенство означает, что z лежит на луче $[1,+\infty)$). Теперь определяем главную ветвь арксинуса в формулой

$$\arcsin z=\frac{1}{i}\ln\left(-z+i\sqrt{1-z^2}\right)-\frac{\pi}{2}$$

Вычислим несколько значений арксинуса:

$$\arcsin 0=\frac{1}{i}\ln(i)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$
$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{1}{i}\ln\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=i\ln e^{\frac{2\pi i}{3}}-\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

Ветвями арксинуса оказываются функции

$$f_{2k}(z) = \arcsin z + 2\pi k \text{ и } f_{2k-1}(z) = -\arcsin z + \pi(2k-1).$$

2^0. Арксинус.

$$h_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \ |z| < 1.$$

Для функции h_0 справедливо интегральное представление

$$h_0(z) = \int_{\gamma_z} f_0(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, d\zeta ,$$

где γ_z — путь соединяющий 0 с точкой z в единичном круге U_0.

Арксинусом называется аналитическая функция, порожденная элементом (U_0, h_0). Арксинус представляется интегралом

$$\arcsin z = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} .$$

γ_z — путь, соединяющий 0 и z, не проходящий через ± 1.

Если рассмотреть только интегралы по путям, проходящим в области G (комплексной плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$), мы получим ветвь арксинуса в этой области.

Продолжим элемент (U_0, h_0) вдоль контура, охватывающего точку 1, например, вдоль контура составленного из берегов разреза $[0, 1]$, получим элемент (U_0, h_1). Элемент (U_0, f_0) преобразуется в $(U_0, -f_0)$. Поэтому $h_1' = -f_0$. Значение функции h_1 в нуле оказывается равным

$$h_1(0) = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

Делаем вывод о том, что

$$h_1 = \pi - h_0 .$$

Повторный обход точки 1 возвратит нас к исходному элементу. В проколотой окрестности единицы элемент (U_0, h_0) порождает аналитическую функцию с точкой ветвления второго порядка.

Обход точки (-1) приводит к функции $h_{-1} = -\pi - h_0$.

Если последовательно совершить обходы точек $(+1)$ $и$ (-1), получим функцию $h_2 = 2\pi + h_0$.

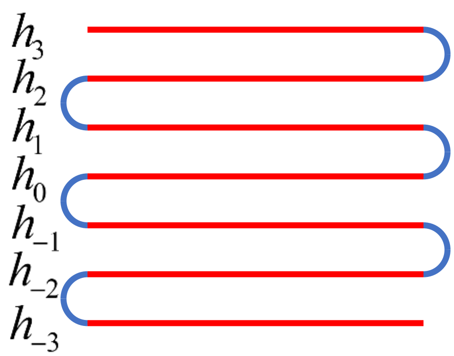
Проведенное продолжение является обходом бесконечности.

Над единичным кругом $|z < 1|$ формируется счетный набор канонических элементов арксинуса

$$(U_0, h_k), \quad h_{2j} = 2\pi j + h_0, \; h_{2j-1} = (2j-1)\pi - h_0$$

В проколотой окрестности единицы арксинус распадается на счетное семейство аналитических функций, имеющих единицу точкой ветвления второго порядка. Аналогичная ситуация имеет место для минус единицы.

Связь элементов можно изобразить схематически:



Каждый из элементов h_k продолжается до голоморфной функции в односвязной области G — комплексной плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Риманова поверхность получается склеиванием счетного набора таких областей по разрезам.

В окрестности ∞ арксинус распадается на две аналитические функции с логарифмическими точками ветвления на бесконечности.